

Cours

Outils Mathématiques



Pierre-Jean Lapray
Enseignant-Chercheur à l'Université de Haute-Alsace
Bureau 2.126

École Nationale Supérieure d'Ingénieurs Sud-Alsace (ENSISA)

Support de cours donné électroniquement aux étudiants :
Filière Automatique et Systèmes Embarqués, 1^{ère} année, Semestre 5

Préface

Ce cours est à destination des étudiants de 1^{ère} année de la filière Automatique et Systèmes Embarqués (ASE) de l'École Nationale Supérieure d'Ingénieurs Sud-Alsace (ENSISA). Il est inspiré du cours [1] donné par M. Pierre Ambs jusqu'en 2021 dans la même école. Nous présenterons les outils de base du traitement du signal : la transformée de Laplace, la convolution et la transformée de Fourier, ainsi que les propriétés et méthodes de calcul associées. Les signaux étudiés seront pour la plupart continus, les signaux discrets et l'échantillonnage n'étant pas traités de manière complète dans ce cours.

À la fin de ce cours, l'étudiant doit être capable de :

1. Connaître les notions de signaux, systèmes, et modèles.
2. Connaître les différents types de signaux : échelon, rampe, impulsion, exponentielle, etc.
3. Calculer des transformées de Laplace et des transformées de Laplace inverses.
4. Résoudre des équations différentielles linéaires à coefficients constants avec la transformée de Laplace.
5. Trouver les coefficients de série de Fourier pour des fonctions périodiques intégrables.
6. Comprendre et calculer la convolution entre 2 signaux.

Table des matières

Préface

Table des Figures	iii
1 Introduction	1
1.1 La notion de signal	1
1.2 La notion de système	3
1.3 La notion de modèle	5
2 La transformée de Laplace	7
2.1 Introduction	7
2.2 Définition	8
2.3 Les transformées de Laplace usuelles	9
2.3.1 L'échelon unité	9
2.3.2 La rampe	10
2.3.3 L'exponentielle	12
2.3.4 Le sinus	12
2.3.5 L'impulsion de Dirac	13
2.4 Propriétés	14
2.4.1 Linéarité	14
2.4.2 Théorème de la translation dans le domaine de Laplace	15
2.4.3 Théorème de la translation dans le domaine temporel	15
2.4.4 Changement d'échelle des temps	17
2.4.5 La transformée de Laplace de la dérivée d'une fonction	18
2.4.6 La transformée de Laplace de l'intégrale d'une fonction	19
2.4.7 Multiplication par une fonction particulière	21
2.4.8 Théorème de la valeur initiale	22
2.4.9 Théorème de la valeur finale	23
2.4.10 Théorème du produit de convolution	24
2.5 La transformée de Laplace inverse	24
2.5.1 La décomposition en éléments simples	24
2.5.2 Cas de pôles simples	27
2.5.3 Cas de pôles multiples	27

2.6	Résolution d'équations différentielles à coefficients constants à l'aide de la transformée de Laplace	28
2.6.1	Forme générale d'une équation différentielle	28
2.6.2	Méthode de résolution d'une équation différentielle	29
2.6.3	Exemple : Équation différentielle du 1 ^{er} ordre	29
2.6.4	Exemple : Équation différentielle d'ordre n avec racines réelles	30
2.6.5	Exemple : Équation différentielle d'ordre n avec racines complexes	31
3	La convolution	36
3.1	Introduction	36
3.2	Définition	36
3.3	Équation de convolution	39
3.4	Principe	41
3.5	Exemple 1 : calcul de la convolution de deux fonctions	43
3.5.1	Décalage de $g(\tau)$	43
3.5.2	Décalage de $f(\tau)$	44
3.6	Exemple 2 : calcul de la convolution de deux fonctions	46
3.7	Convolution et transformée de Laplace	49
3.8	Autres applications	49
3.8.1	Le traitement d'images ("Computer Vision")	49
3.8.2	Le réseau neuronal convolutif (Convolution Neural Network-CNN)	51
4	La transformée de Fourier	52
4.1	Introduction	52
4.2	Séries de Fourier	54
4.2.1	Définition	54
4.2.2	Conditions et théorème de Dirichlet	55
4.2.3	Fonctions paires et impaires	56
4.2.4	Exemple de série de Fourier	57
4.2.5	Série de Fourier sous forme complexe	60
4.2.6	Exemples de séries de Fourier de signaux périodiques	63
4.3	Transformée de Fourier	64
4.3.1	Démonstration et définition	64
4.3.2	Transformée de Fourier 2D	65
4.3.3	Exemple de transformée de Fourier	65
4.4	Propriétés de la transformée de Fourier	66
4.4.1	Linéarité	67
4.4.2	Translation dans le temps (ou théorème du retard)	67
4.4.3	Homothétie	67
4.4.4	Transposition et conjugaisons	67
4.4.5	Fonction multipliée par un déphasage	68
4.4.6	Dérivée d'une fonction	68
4.4.7	Produit de convolution	68

4.4.8	Corrélation	70
4.4.9	Autocorrélation	72
4.4.10	Relation de Parseval-Plancherel	72
4.5	Transformée de Fourier du Dirac $\delta(t)$	73
4.6	Transformée de Fourier à Temps Discret (TFTD)	75
4.7	Transformée de Fourier Discrète (TFD)	76
A	Table des transformées de Laplace	78
B	Résumé des propriétés de la transformée de Laplace	80
	Bibliographie	82

Table des figures

1.1	Transformation d'un signal analogique en signal numérique.	2
1.2	Classification des signaux.	2
1.3	Exemple de signaux très utilisés en automatique.	3
1.4	Représentation d'un système en fonction de son entrée et de sa sortie.	3
1.5	La sonde pt100 : Un thermomètre résistif qui est très utilisé en industrie.	5
1.6	Avant la modélisation, on définit les entrées et les sorties du système étudié.	5
1.7	Du système au modèle.	6
2.1	Pierre-Simon de Laplace (1749-1827)	7
2.2	Plan s	8
2.3	L'échelon unité	10
2.4	La fonction rampe	11
2.5	La fonction exponentielle décroissante	12
2.6	L'impulsion unité (ou fonction de Dirac)	14
2.7	L'échelon unité décalé	16
2.8	Une impulsion quelconque de largeur τ (Figure (a)) est la somme de 2 signaux : un échelon unité retardé de T (Figure (b)), + un échelon opposé et retardé de $T + \tau$ (Figure (c)).	16
2.9	Une impulsion de Dirac retardée. Avec $\epsilon \rightarrow 0$. Attention ici, par rapport à une impulsion quelconque, l'amplitude vaut $\frac{1}{\epsilon}$ et non 1.	17
2.10	Méthodologie globale pour la résolution d'une équation différentielle avec Laplace.	30
3.1	La réponse impulsionnelle d'un système est mesurée en appliquant une impul- sion en entrée du système.	37
3.2	La réponse impulsionnelle de l'œil humain.	38
3.3	Les 2 signaux nommés f et h	41
3.4	41
3.5	Obtention de $h(x - \tau)$	41
3.6	Superposition sur f	42
3.7	Multiplication de $f(\tau)$ et $h(x - \tau)$	42
3.8	Intégrale du produit.	42
3.9	Obtention du résultat de convolution.	42
3.10	Les 2 signaux dont on veut faire la convolution.	43

3.11 Zone 1 : $0 \leq t \leq 1$	44
3.12 Zone 2 : $t > 1$	44
3.13 Zone 1 : $0 \leq t \leq 1$	45
3.14 Zone 2 : $t > 1$	45
3.15 Forme de $c(t)$ pour l'exemple 1. Cela ressemble à une charge et décharge d'un condensateur dans un circuit RC, où f serait le signal d'entrée (tension appliquée), g la réponse impulsionnelle du circuit RC, et c la tension aux bornes du condensateur.	46
3.16 Les 2 signaux dont on veut faire la convolution.	46
3.17 Forme de $c(t)$ pour l'exemple 2. Le résultat de convolution est continue sur $[0, +\infty[$	47
3.18 L'opérateur de convolution est une multiplication dans le domaine de Laplace (propriété également valable lorsque l'on travaille avec la transformée de Fourier).	49
3.19 Exemple d'application d'un filtre convolutif sur des pixels. Référence : Mathworks.	50
3.20 Principe des CNNs (Convolution Neural Networks). Référence : Mathworks.	51
4.1 Jean-Baptiste-Joseph Fourier (1768-1830)	52
4.2 La fonction sinus. A est l'amplitude, T la période, φ la phase et ν la fréquence ($\frac{1}{T}$). La variable x peut tout aussi bien être la variable indépendante t	53
4.3 Décomposition d'un signal carré et sa représentation fréquentielle.	53
4.4 Ci-dessus, une onde triangulaire et une onde carrée et leurs premières composantes sinusoïdales, telles que déterminées par leur transformée de Fourier. Ces sinusoïdes sont représentées par ordre croissant de fréquence. En ajoutant simplement ces sinusoïdes, nous obtenons une assez bonne approximation de l'onde. Il s'avère que la transformée de Fourier de l'onde possède un nombre infini de sinusoïdes d'amplitude non nulle. Si nous pouvions ajouter toutes ces sinusoïdes, nous obtiendrions exactement l'onde (Attention : la figure ci-dessus est un gif, vous devez ouvrir le cours PDF avec Adobe Reader pour voir l'animation).	54
4.5 Exemple de fonction régulière par morceaux. Une fonction régulière par morceaux est une fonction qui a au plus un nombre fini de discontinuités finies.	55
4.6 Exemple de fonction périodiques. De gauche à droite : fonction impaire, fonction paire et fonction ni paire ni impaire.	56
4.7 Le signal carré étudié.	57
4.8 Visualisation des 3 premières harmoniques calculées à partir des coefficients de série de Fourier, et la reconstruction du signal carré à partir de 3 et 15 harmoniques (violet et bleu ciel respectivement). Le phénomène de Gibbs est un effet de bord observé au voisinage d'une discontinuité de la fonction.	58
4.9 Le signal carré est exclusivement constitué d'harmoniques de fréquences multiples impaires de la fréquence fondamentale ν_0 (ou pulsation ω_0) et dont les amplitudes décroissent rapidement. Si la période du signal carré de base augmente, l'écart entre les raies diminue.	61

4.10	La fonction porte $\Pi_D(x)$	66
4.11	(a) Amplitude normalisée de la transformée de Fourier $F(u)$. (b) Spectre d'intensité du signal. C'est le carré de la norme du spectre (c.-à-d. $ F(u) ^2$) en fonction de la fréquence spatiale u	67
4.12	Exemple de convolution d'images avec des fonctions filtres : une impulsion et un filtre Gaussien. Le filtrage Gaussien floute l'image d'entrée. Les signaux sont discrets ici (pixels).	69
4.13	L'opération de déconcolution 2D est l'opération qui consiste à reconstruire l'image de base $f(x, y)$. Un exemple ici [2] de déconvolution appliquée dans l'espace de Fourier sur des images en sortie du télescope Hubble, affectées par un problème de construction de l'optique (défauts de fabrication du miroir primaire, ce qui rend les images floues).	70
4.14	L'objectif est de trouver le gabarit (le visage du roi à droite) dans l'image de la carte à gauche. Une façon naturelle de résoudre ce problème est de faire glisser le gabarit sur l'image et pour chaque position, trouver la différence entre le gabarit et la région de l'image qu'il recouvre. Nous pouvons définir mathématiquement la différence $E(i, j)$ entre le modèle et la région d'image à l'emplacement (i, j) , comme la somme des différences au carré. Lorsque cette différence est faible, nous avons trouvé le modèle dans l'image. En développant $E(i, j)$, nous obtenons l'expression en bas. Notons que minimiser $E(i, j)$ revient à maximiser le dernier des trois termes de $E(i, j)$	71
4.15	Ici, nous montrons le dernier terme mentionné ci-dessus, qui est appelé corrélation (ou corrélation croisée ou intercorrélacion)	71
4.16	Voici le résultat d'une corrélation croisée normalisée appliquée à un problème à deux dimensions. Cette normalisation de la corrélation croisée est souvent nécessaire en imagerie, car elle la rend insensible à la luminosité globale de la région d'image à laquelle elle est appliquée. Nous essayons de trouver le visage du roi (le gabarit) dans l'image de la carte à jouer. L'image de droite montre la valeur de corrélation pour chaque pixel de l'image d'origine (la carte à jouer). Dans l'image de corrélation, plus le pixel est brillant, plus la valeur de corrélation est élevée. Notez que la valeur maximale se situe bien à l'emplacement du visage du roi dans la carte.	72
4.17	Échantillonnage d'un signal $f(x)$	75

4.18 (a) TF 2D d'images simples (cosinus dans la direction x de fréquences différentes). (b) Objets où les contours produisent des fréquences élevées. (c) Exemple de filtrage des basses fréquences dans le domaine de Fourier 2D (on ne garde que les hautes fréquences spatiales, c.-à-d. les contours). À des fins de visualisation, c'est le logarithme de la valeur absolue de l'amplitude qui est montrée (la phase est ignorée). Le log sert à compresser la large gamme de valeurs d'amplitude dans une plage plus petite. Le centre de l'amplitude de la transformée est la fréquence nulle, et la fréquence augmente avec la distance du centre (dans les deux sens). Ici p et q correspondent aux valeurs k et l de la TFD 2D vue précédemment. Référence : [6].	77
B.1 Résumé des propriétés de la transformée de Laplace. Référence [3].	81

1 Introduction

Les outils mathématiques abordés dans ce cours sont destinés à être utilisés dans la spécialité Automatique et Systèmes Embarqués, dans le but de modéliser et d’analyser des systèmes physiques en vue d’interagir avec ceux-ci. Pour cela, il sera nécessaire d’appliquer au système étudié des signaux en entrées, puis d’analyser les signaux en sorties. Il faudra donc disposer d’outils mathématiques efficaces afin d’étudier d’une part le système et d’autre part les signaux.

Les mathématiques utilisées dans ce cours sont dédiées à l’ingénieur pour des applications du monde réel. Pour cela, nous resterons dans un cadre mathématique restreint aux cas pratiques (sans la rigueur des “belles mathématiques”).

1.1 La notion de signal

Un signal est la variation d’une grandeur physique de nature quelconque, support de l’information.

- **Exemples de signaux** : onde électromagnétique, onde acoustique, onde lumineuse, signal électrique, signal binaire, etc.
- **Théorie du signal** : outils mathématiques pour représenter un signal en fonction du temps ou de l’espace, indépendamment de la nature physique du signal.
- **Traitement du signal** : transformation du signal pour l’analyser, le filtrer, le débruiter, le convertir, l’amplifier, l’atténuer, etc.
- **Domaines d’applications** : télécommunication, imagerie, automatique, électricité, chimie, etc.

De nos jours, le traitement du signal est en grande partie fait sur des signaux échantillonnés (numériques), supposant une opération d’échantillonnage (voir Figure 1.1 pour information). Ces aspects seront développés dans les cours portant spécifiquement sur le traitement numérique du signal (S6 et S7, R. Orjuella, J.-P. Lauffenburger).

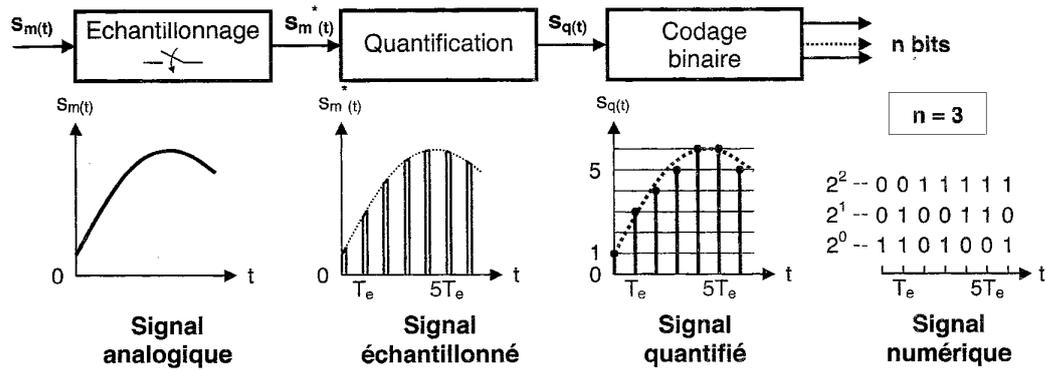


FIGURE 1.1 – Transformation d’un signal analogique en signal numérique.

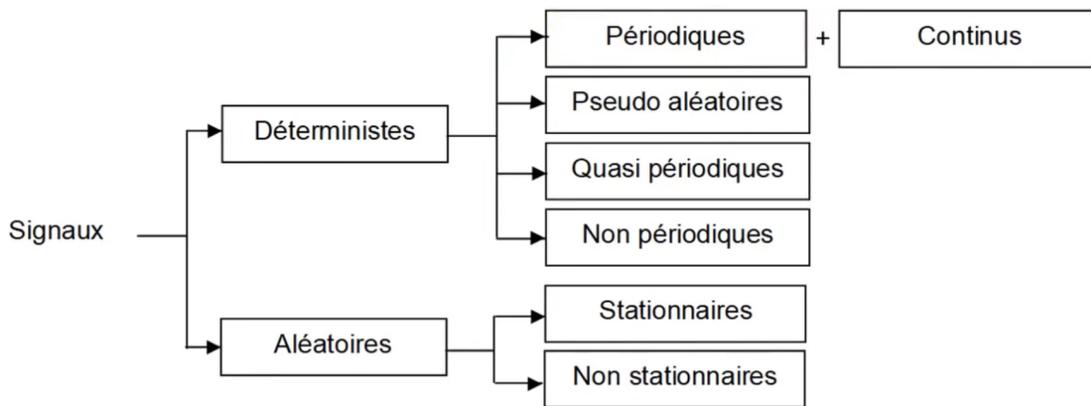


FIGURE 1.2 – Classification des signaux.

Les signaux peuvent être déterministes ou aléatoires (une classification des signaux est visible sur la Figure 1.2).

Sur la Figure 1.3, on montre quelques exemples de signaux déterministes utilisés couramment pour étudier le comportement dynamique des systèmes en automatique. Ce sont des signaux élémentaires idéaux (non réalisables physiquement), mais très pratiques pour l’étude de modèles en automatique.

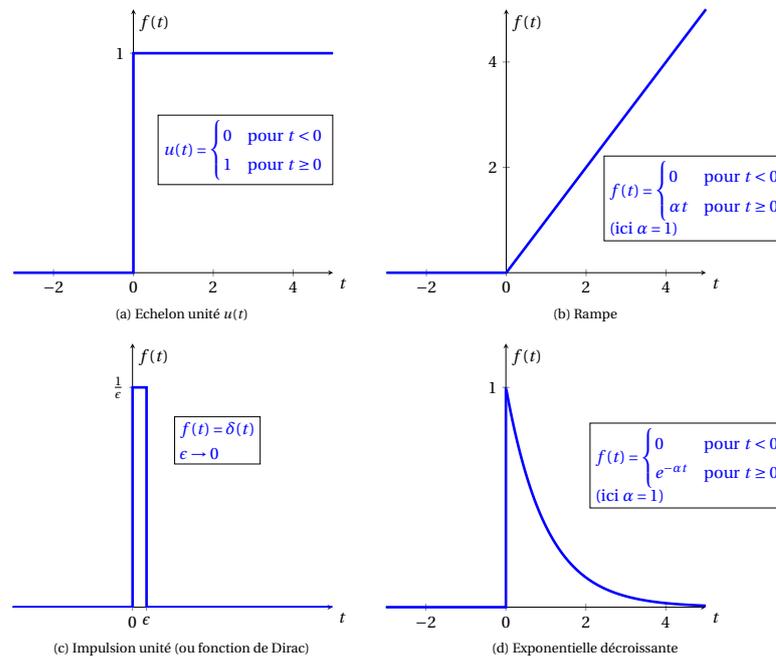


FIGURE 1.3 – Exemple de signaux très utilisés en automatique.

1.2 La notion de système

Un **système** est un objet physique, ou un ensemble d'objets, dont on veut connaître les caractéristiques en vue de prédire et/ou contrôler son fonctionnement.

Un **système dynamique** peut être modélisé par un bloc mathématique qui transforme un **signal d'entrée** au cours du temps. La variable d'entrée est notée $x(t)$ (appelée aussi l'**excitation** et aussi notée $e(t)$) et la variable de sortie est $y(t)$ (la **réponse** aussi notée $s(t)$).

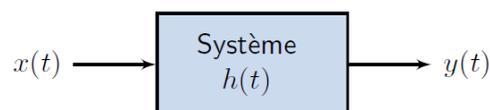


FIGURE 1.4 – Représentation d'un système en fonction de son entrée et de sa sortie.

Le système est caractérisé par sa réponse impulsionnelle $h(t)$. La réponse impulsionnelle permet la représentation mathématique d'un système en fonction de son entrée et de sa sortie.

Exemples de systèmes :

- Un circuit RC,
- Un moteur électrique à courant continu,
- Une réaction chimique, un bac de chauffe,
- La régulation de la glycémie (évolution des concentrations de réactifs et produits),

- Une douche (température, débit),
- Un chauffage central,
- Un capteur d'image, de température, un ressort, un potentiomètre, etc.
- Une voiture, avion, train, etc.

Il existe des systèmes dits "linéaires", et d'autres dits "non-linéaires". Les systèmes non linéaires sont plus difficiles à étudier que les systèmes linéaires. Toutefois, on essaiera toujours de se ramener à un système linéaire (en "linéarisant") quand cela est possible.

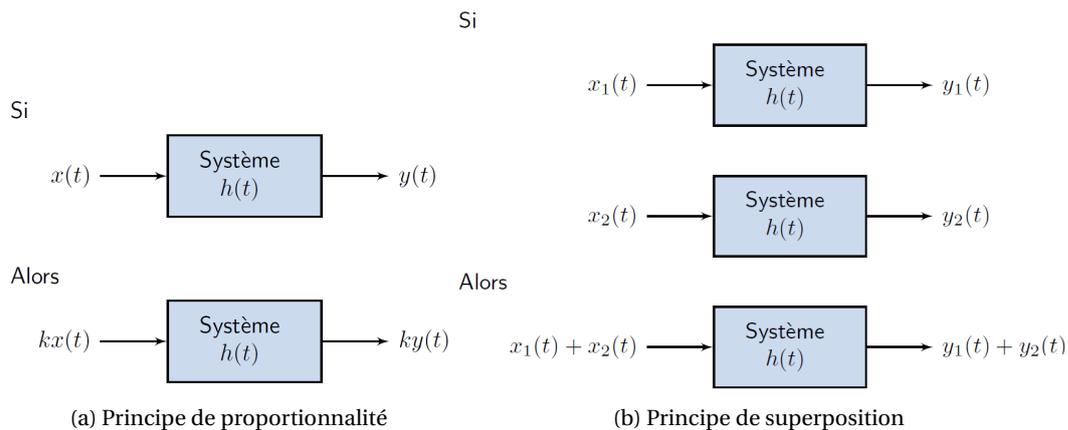
Un système est dit **linéaire** s'il possède 2 caractéristiques :

1. Principe de proportionnalité :

- A un multiple d'une entrée quelconque correspond le même multiple de la sortie correspondante.

2. Principe de superposition :

- Si on applique deux signaux (ou plus) à un même système, la sortie est la somme des réponses individuelles.

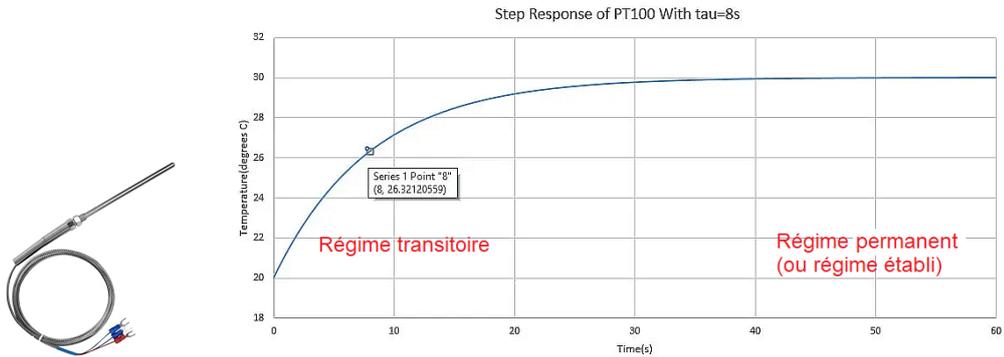


Un système dynamique soumis à une excitation comporte 2 phases de fonctionnement :

- **Régime transitoire** : période d'évolution d'un système qui n'a pas encore atteint un état stable en sortie
- **Régime permanent (ou régime établi)** : La sortie du système est stable

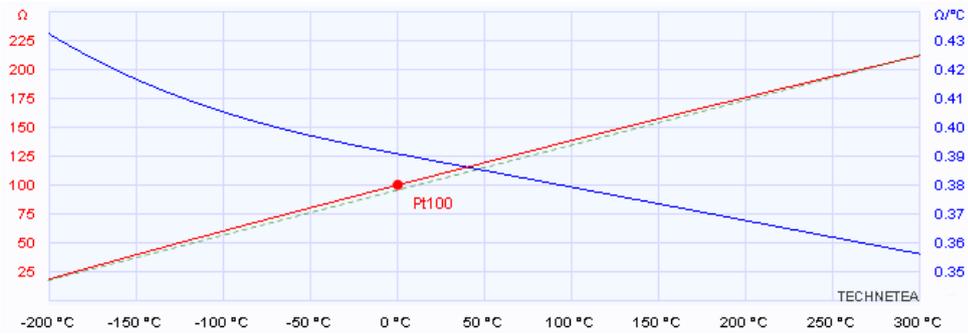
On peut donc caractériser la réponse dynamique d'un système, par exemple en mesurant la rapidité avec laquelle il atteint son régime permanent.

Un exemple de système linéaire, ainsi que ses 2 phases de fonctionnement, est montré en Figure 1.5.



(c) La sonde résistive pt100.

(d) La réponse dynamique (temporelle) de la sonde pt100 à un échelon de température 20° → 30°.



(e) La caractéristique linéaire de la sonde en rouge en régime permanent. La résistance de la sonde change en fonction de la température. Le ratio $\frac{^{\circ}C}{\Omega}$ est linéaire.

FIGURE 1.5 – La sonde pt100 : Un thermomètre résistif qui est très utilisé en industrie.

1.3 La notion de modèle

On modélise un système en définissant et en utilisant un **modèle** mathématique qui relie les entrées (causes) aux sorties (effets).



FIGURE 1.6 – Avant la modélisation, on définit les entrées et les sorties du système étudié.

Comment crée-t-on un modèle?

- Par la mesure ou l'expérimentation (par exemple le modèle $U = R \times I$),

- À partir d'autres modèles plus fondamentaux,
- Par expérience de pensée, et en confrontant les résultats du modèle avec l'expérimentation ou non (ex : expériences de pensée sur la relativité générale et la découverte des ondes gravitationnelles 1916/2015).

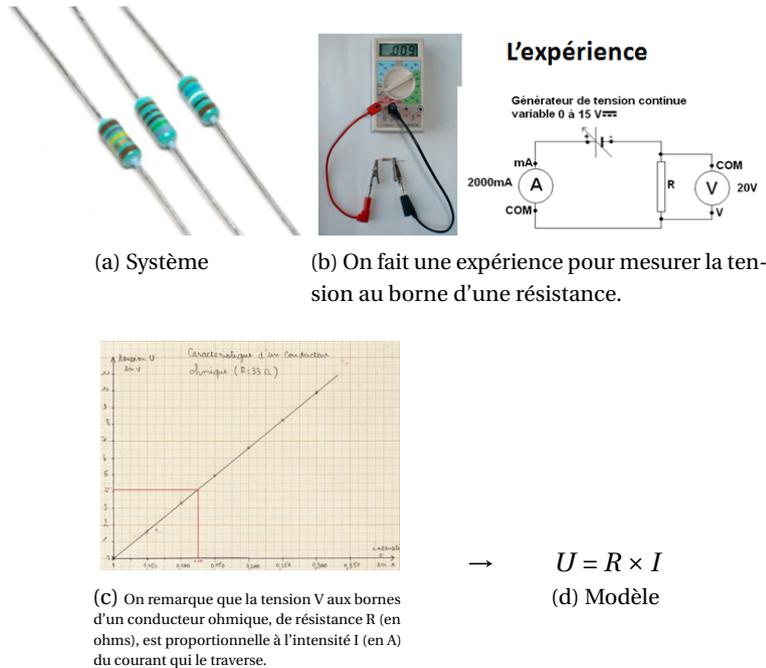


FIGURE 1.7 – Du système au modèle.

Sans **modèle**, il est difficile de prévoir le comportement d'un système de manière exhaustive, et donc de contrôler la variable de sortie du système correctement (but de l'automatique). Le modèle permet une étude statique/dynamique d'un système sans expérience. Dans le cas d'une étude dynamique, on cherche à connaître les variations temporelles de la variable de sortie (est-ce que ça varie plus ou moins vite, croissance, décroissance, stabilité, temps de réponse, etc.). Par exemple, il est important d'établir un modèle sur l'évolution du coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence d'une aile d'avion... Pour établir un modèle dynamique, on utilise les **équations différentielles**.

Dans le chapitre suivant, nous étudierons un outil permettant de résoudre certaines de ces équations différentielles, dites linéaires à coefficients constants, et d'étudier la réponse des systèmes dans le domaine temporel.

2 La transformée de Laplace

2.1 Introduction

Pour un système linéaire, la relation entre les grandeurs d'entrée et les grandeurs de sortie peuvent se mettre sous la forme d'un ensemble d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. La **transformée de Laplace** est un outil qui permet de résoudre plus facilement ce genre d'équations.



FIGURE 2.1 – Pierre-Simon de Laplace (1749-1827)

La transformée de Laplace sera seulement abordée d'un côté pratique pour une utilisation dans l'étude des systèmes asservis. La transformée de Laplace étant une intégrale de variable complexe, l'étude théorique complète est délicate. Cette théorie pourra être trouvée dans un livre de mathématiques. Dans ce cours, la transformée de Laplace sera présentée de la même façon que dans les livres d'automatique appliquée.

2.2 Définition

Une fonction mathématique permet de définir un résultat pour chaque **valeur** d'un ensemble (ou domaine) A vers un ensemble B ($x \rightarrow f(x)$). De manière analogue, une transformée mathématique permet de définir une **fonction** pour chaque fonction d'un ensemble A vers un ensemble B ($f(t) \rightarrow \mathcal{F}[f(t)]$).

La transformée de Laplace^I est utilisée pour résoudre des équations différentielles de manière simple. Elle apparaît dans beaucoup de branches de la physique mathématique, surtout après la fin de la 2^{ème} guerre mondiale.

La transformée de Laplace est définie par :

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2.1)$$

Avec $f(t)$ une fonction intégrable nulle en dehors de l'intervalle $[0, +\infty[$, et la variable de temps $t \geq 0$. Le résultat est fonction de s , la variable de fréquence complexe^{II} de Laplace (notée aussi souvent p).

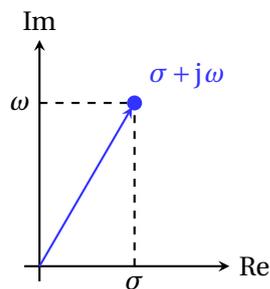


FIGURE 2.2 – Plan s .

Note : La variable de Laplace p est principalement utilisée dans les ouvrages français alors qu'on trouvera l'utilisation de "s" ou "S" dans les ouvrages en langue anglaise. Toutes ces notations sont acceptées, vous pourrez utiliser la variable de votre choix à condition de toujours utiliser la même variable.

I. Elle fut en réalité découverte par Leonhard Euler (Suisse Bâle fin 18^{ème} siècle) mais beaucoup utilisée par Pierre-Simon de Laplace dans son travail sur la théorie des probabilités.

II. $s = \rho + j\omega$ qui se représente dans le plan complexe s , et $i^2 = -1$. $(-i)^2 = -1$. On les associe à des vecteurs ou des points d'un plan.

Remarques :

- $f(t)$ doit être définie pour $t > 0$ (le signal n'existe pas pour des temps négatifs).
- L'intégrale de 0 à $+\infty$ englobe l'instant initial, ce qui permet d'ajouter la description du système à l'instant $t = 0$ (conditions initiales). On peut donc étudier le comportement dynamique d'un système à partir de $t = 0$.

Utilité de la transformée de Laplace :

- Résoudre des équations différentielles en les transformant en des équations algébriques ordinaires dans le domaine de Laplace. Il est alors possible de manipuler cette équation algébrique en utilisant les règles du calcul algébrique dans le domaine de Laplace s . La solution finale est obtenue en prenant la transformée de Laplace inverse.
- Fournir des informations qualitatives (stabilité, précision et rapidité) sur le système étudié.

Il existe une convention largement utilisée qui est de noter les fonctions dans le domaine du temps avec des lettres minuscules et les fonctions dans le domaine complexe de Laplace avec des lettres majuscules. Les conventions d'écriture utilisées dans ce cours sont résumées dans la Table 2.1.

Domaine temporel	Transformée	Domaine de Laplace
$f(t)$	\mathcal{L}	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$
Solution dans domaine temporel	Transformée inverse	Solution dans domaine de Laplace
$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$	\mathcal{L}^{-1}	$G(s)$

TABLEAU 2.1 – Conventions d'écriture de la transformée de Laplace et de la transformée inverse.

2.3 Les transformées de Laplace usuelles

Voici quelques signaux élémentaires dont il faut connaître la transformée de Laplace sans avoir à la recalculer.

2.3.1 L'échelon unité

L'échelon unité (fonction Heaviside) est défini par :

$$f(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

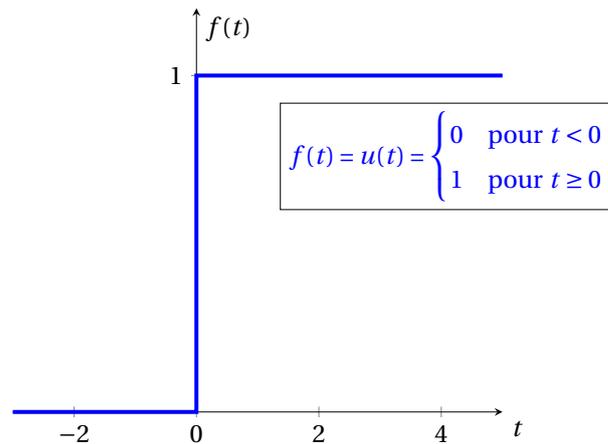


FIGURE 2.3 – L'échelon unité

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_{t=0}^{t=+\infty} = -\frac{e^{-s(+\infty)}}{s} + \frac{e^{-s(0)}}{s}$$

(la primitive de $f(x) = u' e^u$ est $F(x) = e^u$)

$$F(s) = \frac{1}{s}$$

- $F(s) = \frac{1}{s}$ est la transformée de Laplace de la **fonction échelon ou fonction d'Heaviside, appelée aussi communément $u(t)$** . Oliver Heaviside, britannique autodidacte de la fin du 19^{ème}, a développé le calcul vectoriel, reformulé les équations de Maxwell (20 équ. -> 4 équ.), découverte de la ionosphère, inventeur du câble coaxial, etc. La fonction fût à l'origine inventée pour calculer le courant lorsqu'un circuit électrique est allumé.

2.3.2 La rampe

On définit la fonction rampe par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ at & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

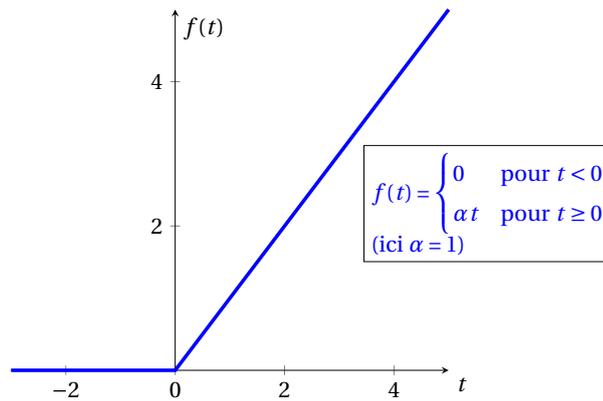


FIGURE 2.4 – La fonction rampe

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} \alpha t \cdot e^{-st} dt$$

Intégrale d'un produit de fonctions -> Intégration par parties :

$$\frac{d(uv)}{dt} = u \frac{dv}{dt} + v \frac{du}{dt} \quad (\text{Règle du produit ou règle de Leibniz})$$

$$d(uv) = u dv + v du \quad \rightarrow \quad u dv = d(uv) - v du$$

$$\int_0^{+\infty} u dv = \int_0^{+\infty} d(uv) - \int_0^{+\infty} v du \quad \rightarrow \quad \int_0^{+\infty} u dv = [uv]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} v du$$

On identifie :

$$u = \alpha t \quad \rightarrow \quad du = \alpha \cdot dt$$

$$dv = e^{-st} dt \quad \rightarrow \quad v = -\frac{e^{-st}}{s}$$

On remplace :

$$F(s) = \int_0^{+\infty} \alpha t \cdot e^{-st} dt = \left[-\alpha t \cdot \frac{e^{-st}}{s} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-st}}{s} \cdot \alpha dt$$

$$= \left[-\alpha t \cdot \frac{e^{-st}}{s} \right]_0^{+\infty} + \left[-\alpha \cdot \frac{e^{-st}}{s^2} \right]_0^{+\infty}$$

$$F(s) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-\alpha t \cdot \frac{e^{-st}}{s} - \frac{\alpha e^{-st}}{s^2} \right] - \lim_{t \rightarrow 0} \left[-\alpha t \cdot \frac{e^{-st}}{s} - \frac{\alpha e^{-st}}{s^2} \right]$$

$$F(s) = \frac{\alpha}{s^2}$$

— $F(s) = \frac{\alpha}{s^2}$ est la **transformée de Laplace de la fonction rampe**.

2.3.3 L'exponentielle

On définit la fonction exponentielle décroissante par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ e^{-\alpha t} & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

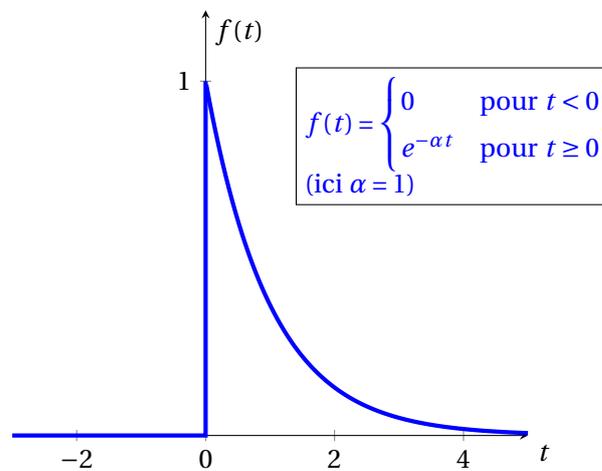


FIGURE 2.5 – La fonction exponentielle décroissante

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \left[-\frac{e^{-(s+\alpha)t}}{s+\alpha} \right]_{t=0}^{t=+\infty} = -\frac{e^{-\infty}}{s+\alpha} + \frac{e^0}{s+\alpha}$$

$$F(s) = \frac{1}{s+\alpha}$$

— $F(s) = \frac{1}{s+\alpha}$ est la **transformée de Laplace de la fonction exponentielle** $e^{-\alpha t}$.

2.3.4 Le sinus

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ \sin(\omega t) & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} \sin(\omega t) \cdot e^{-st} dt$$

On sait que (relation d'Euler) :

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{+j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \sin(\omega t) \cdot e^{-st} dt &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{+j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{2j} \left[\int_0^{+\infty} e^{+j\omega t} \cdot e^{-st} dt - \int_0^{+\infty} e^{-j\omega t} \cdot e^{-st} dt \right] \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{1}{2j} \left(\frac{s + j\omega - s + j\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}}$$

de la même manière pour le cosinus :

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} \cos(\omega t) \cdot e^{-st} dt$$

$$\boxed{F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}}$$

2.3.5 L'impulsion de Dirac

L'impulsion de Dirac est toujours représentée par la fonction $\delta(t)$. La théorie de l'impulsion de Dirac pourra être trouvée dans les livres de traitement du signal. En résumé, l'impulsion de Dirac a une surface unitaire et on peut considérer que c'est une impulsion infiniment fine de hauteur tendant vers l'infini, telle que :

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(t)$$

$$\delta(t) = 0 \text{ si } t \neq 0 \text{ et } \int_0^{+\infty} \delta(t) \cdot dt = 1$$

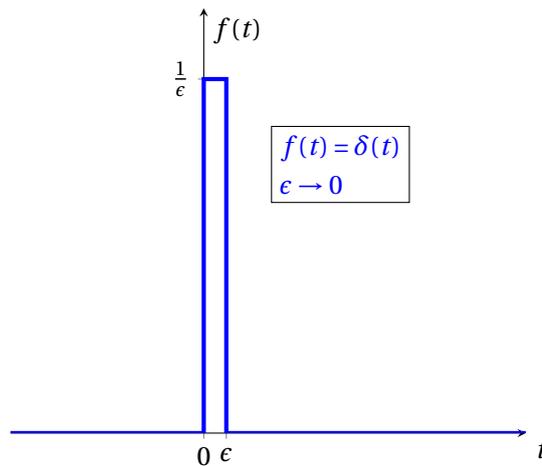


FIGURE 2.6 – L’impulsion unité (ou fonction de Dirac)

$$F(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

2.4 Propriétés

Dans l’étude des systèmes asservis, les transformées de Laplace et les transformées de Laplace inverses ne sont pas calculées à partir de l’intégrale de Laplace, mais en utilisant les transformées de Laplace des signaux élémentaires et les propriétés de la transformée de Laplace. Il est donc indispensable de connaître aussi bien ces transformées de Laplace vues précédemment que les propriétés des transformées de Laplace qu’il ne faudra pas à avoir à recalculer. Les propriétés de la transformée de Laplace sont démontrées en utilisant l’intégrale de Laplace.

Un résumé des propriétés est disponible en Annexe B.

2.4.1 Linéarité

- Principe de superposition (additivité ou sommation)

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s)$$

La transformée de Laplace est une intégrale, et l’intégrale d’une somme de deux fonctions est égale à la somme des intégrales. Attention : L’intégrale d’un produit n’est pas égale au produit des intégrales. Donc la transformée de Laplace d’un produit de fonctions n’est pas égale au produit des transformées de Laplace.

- La multiplication par une constante (principe de proportionnalité)

$$\mathcal{L} [\alpha f(t)] = \alpha F(s)$$

où α est une constante.

2.4.2 Théorème de la translation dans le domaine de Laplace

- Translater un signal dans le domaine de s revient à multiplier le signal temporel par une exponentielle décroissante.

$$\mathcal{L} [e^{-\alpha t} f(t)] = F(s + \alpha)$$

- **Démonstration**

$$\mathcal{L} [e^{-\alpha t} f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(t) \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-t(s+\alpha)} dt = F(s + \alpha)$$

- **Exemples**

$$\mathcal{L} [e^{-\alpha t} u(t)] = \frac{1}{s + \alpha}$$

$$\mathcal{L} [e^{-\alpha t} \sin(\omega t)] = \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$$

2.4.3 Théorème de la translation dans le domaine temporel

- Aussi appelé le théorème du retard, où $f(t)$ est translatée de T (constante) :

$$\mathcal{L} [f(t - T)] = e^{-sT} F(s)$$

où $T > 0$ est le retard en secondes

- Retarder en temps un signal revient donc à multiplier sa transformée de Laplace par une exponentielle décroissante.

- **Démonstration**

$$\mathcal{L} [f(t - T)] = \int_0^{\infty} f(t - T) \cdot e^{-st} dt = \int_0^T 0 \cdot e^{-st} dt + \int_T^{\infty} f(t - T) \cdot e^{-st} dt$$

Avec un changement de variable où $\tau = t - T$ ($t = \tau + T$) :

$$\int_0^{\infty} f(\tau) \cdot e^{-s(\tau+T)} d(\tau + T) = e^{-sT} \int_0^{\infty} f(\tau) \cdot e^{-s\tau} d\tau = e^{-sT} F(s)$$

- **Exemple 1 : Échelon décalé**

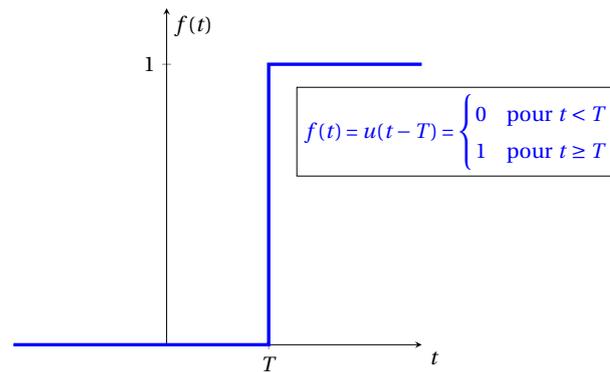


FIGURE 2.7 – L'échelon unité décalé

$$\mathcal{L}[u(t - T)] = e^{-sT} \frac{1}{s}$$

— **Exemple 2 : Impulsion quelconque**

On décompose le signal en signaux élémentaires dont on connaît la transformée de Laplace, puis on somme les transformées de ces signaux élémentaires.

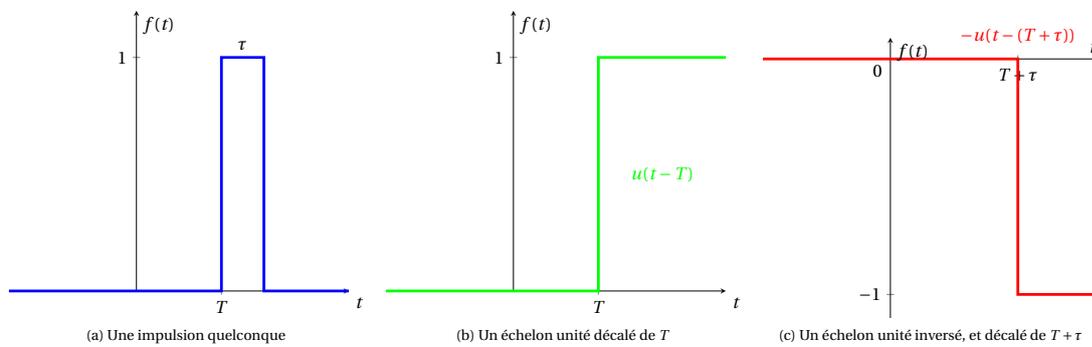


FIGURE 2.8 – Une impulsion quelconque de largeur τ (Figure (a)) est la somme de 2 signaux : un échelon unité retardé de T (Figure (b)), + un échelon opposé et retardé de $T + \tau$ (Figure (c)).

$$\mathcal{L}[u(t - T) - u(t - (T + \tau))] = \frac{1}{s} (e^{-sT} - e^{-s(T+\tau)}) = \frac{e^{-sT}}{s} (1 - e^{-s\tau})$$

— Exemple 3 : Impulsion de Dirac décalée

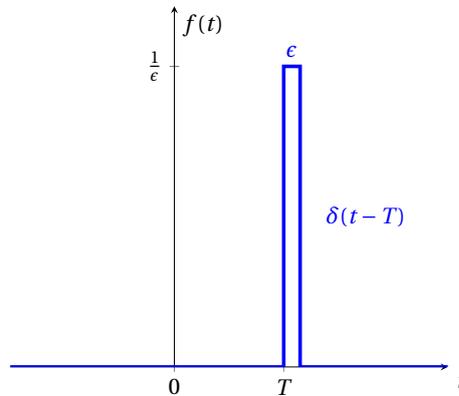


FIGURE 2.9 – Une impulsion de Dirac retardée. Avec $\epsilon \rightarrow 0$. Attention ici, par rapport à une impulsion quelconque, l'amplitude vaut $\frac{1}{\epsilon}$ et non 1.

$$\mathcal{L}[\delta(t - T)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-sT}}{s} \cdot \frac{1}{\epsilon} (1 - e^{-s\epsilon}) = e^{-sT} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^{-s\epsilon}}{\epsilon s} \right)$$

On utilise le développement limité de l'exponentielle :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$$\mathcal{L}[\delta(t - T)] = e^{-sT} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \left(1 - \epsilon s + \frac{\epsilon^2 s^2}{2} + \dots\right)}{\epsilon s} \right)$$

$$= e^{-sT} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\epsilon s - \frac{\epsilon^2 s^2}{2} - \dots}{\epsilon s} \right) = e^{-sT} \cdot 1$$

Comme on sait que $\mathcal{L}[\delta(t - T)] = e^{-sT} \mathcal{L}[\delta(t)]$ (propriété de la translation temporelle), on retrouve ici $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$

2.4.4 Changement d'échelle des temps

— Appelée aussi "dilatation du temps", on multiplie la variable t par une constante a :

$$\boxed{\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)}$$

— Démonstration

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_0^{\infty} f(at).e^{-st} dt$$

On pose $\tau = at$ (changement de variable) :

$$= \int_0^{\infty} f(\tau).e^{-s\frac{\tau}{a}} d\frac{\tau}{a} = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(\tau).e^{-\frac{s}{a}\tau} d\tau = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

2.4.5 La transformée de Laplace de la dérivée d'une fonction

$$\mathcal{L}[f'] = \mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^{+\infty} \left(\frac{df(t)}{dt}\right) e^{-st} dt$$

Intégrale d'un produit de fonctions -> Intégration par parties :

$$\frac{d(uv)}{dt} = u \frac{dv}{dt} + v \frac{du}{dt} \quad (\text{règle de Leibniz}) \rightarrow d(uv) = u dv + v du \rightarrow u dv = d(uv) - v du$$

$$\int_0^{+\infty} u dv = \int_0^{+\infty} d(uv) - \int_0^{+\infty} v du \rightarrow \int_0^{+\infty} u dv = [uv]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} v du$$

On identifie :

$$u = e^{-st} \rightarrow du = -s.e^{-st}.dt$$

$$dv = \left(\frac{df(t)}{dt}\right).dt \rightarrow v = f(t)$$

$$F(s) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{df(t)}{dt}\right) e^{-st} dt = [f(t).e^{-st}]_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$\boxed{\mathcal{L}[f'] = sF(s) - f(0)}$$

La transformation de Laplace de la dérivée d'une fonction correspond à une multiplication par s de la transformée de la fonction (à une constante initiale près). On peut voir l'avantage de la transformée de Laplace, c.-à-d. de transformer une équation différentielle en une équation algébrique (ou polynomiale).

De la même manière, on peut définir la transformée de Laplace des dérivées supérieures.

$$\mathcal{L}[f''] = \mathcal{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{df(t)}{dt}\right)\right] = s\mathcal{L}[f'] - f'(0)$$

(on remplace f par f' dans $\mathcal{L}\{f'\}$)

$$= s(sF(s) - f(0)) - f'(0)$$

$$\boxed{\mathcal{L}[f''] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)}$$

De la même manière :

$$\boxed{\mathcal{L}[f'''] = s^3 F(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)}$$

Et de manière générale, la dérivée $n^{\text{ième}}$ s'exprime par :

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \frac{df(0)}{dt} \cdots - \frac{d^{n-1} f(0)}{dt^{n-1}}}$$

2.4.6 La transformée de Laplace de l'intégrale d'une fonction

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s}}$$

— **Démonstration** : voir page ci-après. La démonstration est issue de la littérature [7].

Real-integration theorem. If $f(t)$ is of exponential order, then the Laplace transform of $\int f(t) dt$ exists and is given by

$$\mathcal{L}\left[\int f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s} \quad (2-8)$$

where $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ and $f^{-1}(0) = \int f(t) dt$, evaluated at $t = 0$.

Note that if $f(t)$ involves an impulse function at $t = 0$, then $f^{-1}(0+) \neq f^{-1}(0-)$. So if $f(t)$ involves an impulse function at $t = 0$, we must modify Equation (2-8) as follows:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_+\left[\int f(t) dt\right] &= \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0+)}{s} \\ \mathcal{L}_-\left[\int f(t) dt\right] &= \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0-)}{s} \end{aligned}$$

The real-integration theorem given by Equation (2-8) can be proved in the following way. Integration by parts yields

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\int f(t) dt\right] &= \int_0^\infty \left[\int f(t) dt\right] e^{-st} dt \\ &= \left[\int f(t) dt\right] \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t) \frac{e^{-st}}{-s} dt \\ &= \frac{1}{s} \int f(t) dt \Big|_{t=0} + \frac{1}{s} \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \\ &= \frac{f^{-1}(0)}{s} + \frac{F(s)}{s} \end{aligned}$$

and the theorem is proved.

We see that integration in the time domain is converted into division in the s domain. If the initial value of the integral is zero, the Laplace transform of the integral of $f(t)$ is given by $F(s)/s$.

The preceding real-integration theorem given by Equation (2-8) can be modified slightly to deal with the definite integral of $f(t)$. If $f(t)$ is of exponential order, the Laplace transform of the definite integral $\int_0^t f(t) dt$ is given by

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s} \quad (2-9)$$

where $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$. This is also referred to as the real-integration theorem. Note that if $f(t)$ involves an impulse function at $t = 0$ then $\int_{0+}^t f(t) dt \neq \int_{0-}^t f(t) dt$, and the following distinction must be observed:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_+\left[\int_{0+}^t f(t) dt\right] &= \frac{\mathcal{L}_+[f(t)]}{s} \\ \mathcal{L}_-\left[\int_{0-}^t f(t) dt\right] &= \frac{\mathcal{L}_-[f(t)]}{s} \end{aligned}$$

To prove Equation (2-9), first note that

$$\int_0^t f(t) dt = \int f(t) dt - f^{-1}(0)$$

where $f^{-1}(0)$ is equal to $\int f(t) dt$ evaluated at $t = 0$ and is a constant. Hence

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \mathcal{L}\left[\int f(t) dt\right] - \mathcal{L}[f^{-1}(0)]$$

Noting that $f^{-1}(0)$ is a constant so that

$$\mathcal{L}[f^{-1}(0)] = \frac{f^{-1}(0)}{s}$$

we obtain

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s} - \frac{f^{-1}(0)}{s} = \frac{F(s)}{s}$$

2.4.7 Multiplication par une fonction particulière

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$$

— **Démonstration**

$$\mathcal{L}[tf(t)] = \int_0^{\infty} tf(t).e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) \left(-\frac{de^{-st}}{ds} \right) dt = -\frac{d}{ds} \int_0^{\infty} f(t).e^{-st} dt = -\frac{dF(s)}{ds}$$

— De la même manière :

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = -(1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

2.4.8 Théorème de la valeur initiale

— Si $f(t)$ et sa dérivée admettent une transformée de Laplace, alors :

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow 0} [f(t)] = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s)]}$$

— Ceci permet d'obtenir l'allure de $f(t)$ vers 0 en restant dans le domaine de s (sans repasser dans le domaine temporel).

— **Démonstration** : voir ci-après. La démonstration est issue de la littérature [7].

Initial-value theorem. The initial-value theorem is the counterpart of the final-value theorem. By using this theorem, we are able to find the value of $f(t)$ at $t = 0+$ directly from the Laplace transform of $f(t)$. The initial-value theorem does not give the value of $f(t)$ at exactly $t = 0$ but at a time slightly greater than zero.

The initial-value theorem may be stated as follows: If $f(t)$ and $df(t)/dt$ are both Laplace transformable and if $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ exists, then

$$f(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

To prove this theorem, we use the equation for the \mathcal{L}_+ transform of $df(t)/dt$:

$$\mathcal{L}_+ \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] = sF(s) - f(0+)$$

For the time interval $0+ \leq t \leq \infty$, as s approaches infinity, e^{-st} approaches zero. (Note that we must use \mathcal{L}_+ rather than \mathcal{L}_- for this condition.) And so

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0+}^{\infty} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0+)] = 0$$

or

$$f(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

In applying the initial-value theorem, we are not limited as to the locations of the poles of $sF(s)$. Thus the initial-value theorem is valid for the sinusoidal function.

It should be noted that the initial-value theorem and the final-value theorem provide a convenient check on the solution, since they enable us to predict the system behavior in the time domain without actually transforming functions in s back to time functions.

2.4.9 Théorème de la valeur finale

- Si $f(t)$ converge vers une valeur finie, alors :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [f(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s)]$$

- Ceci permet d'obtenir l'allure de $f(t)$ vers l'infini en restant dans le domaine de s (sans repasser dans le domaine temporel).
 — **Démonstration** : voir ci-après. La démonstration est issue de la littérature [7].

Final-value theorem. The final-value theorem relates the steady-state behavior of $f(t)$ to the behavior of $sF(s)$ in the neighborhood of $s = 0$. This theorem, however, applies if and only if $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ exists [which means that $f(t)$ settles down to a definite value for $t \rightarrow \infty$]. If all poles of $sF(s)$ lie in the left half s plane, $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ exists. But if $sF(s)$ has poles on the imaginary axis or in the right half s plane, $f(t)$ will contain oscillating or exponentially increasing time functions, respectively, and $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ will not exist. The final-value theorem does not apply in such cases. For instance, if $f(t)$ is the sinusoidal function $\sin \omega t$, $sF(s)$ has poles at $s = \pm j\omega$ and $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ does not exist. Therefore, this theorem is not applicable to such a function.

The final-value theorem may be stated as follows. If $f(t)$ and $df(t)/dt$ are Laplace transformable, if $F(s)$ is the Laplace transform of $f(t)$, and if $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ exists, then

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

To prove the theorem, we let s approach zero in the equation for the Laplace transform of the derivative of $f(t)$ or

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0)]$$

Since $\lim_{s \rightarrow 0} e^{-st} = 1$, we obtain

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] dt &= f(t) \Big|_0^{\infty} = f(\infty) - f(0) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(0) \end{aligned}$$

from which

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

The final-value theorem states that the steady-state behavior of $f(t)$ is the same as the behavior of $sF(s)$ in the neighborhood of $s = 0$. Thus, it is possible to obtain the value of $f(t)$ at $t = \infty$ directly from $F(s)$.

2.4.10 Théorème du produit de convolution

- La convolution est une opération très courante en automatique et traitement du signal. Connaissant la réponse impulsionnelle $h(t)$ d'un système, elle permet de calculer la réponse $g(t)$ de ce système à un signal $f(t)$. L'opérateur convolution est représenté par le symbole $*$.
- Soient 2 fonctions $f(t)$ et $h(t)$, le produit de convolution est défini par :

$$g(t) = f(t) * h(t) = \int_0^{\infty} f(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t) * h(t)] = \mathcal{L}[h(t) * f(t)] = F(s)H(s)}$$

- **Démonstration :**

$$\mathcal{L}\left[\int_0^{\infty} f(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau\right] = \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau\right) \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(\tau) \left(\int_0^{\infty} e^{-st} \cdot h(t - \tau) dt\right) d\tau$$

(théorème de la translation dans le domaine temporel)

$$= \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} H(s) d\tau = H(s) \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau = H(s)F(s) = F(s)H(s)$$

- L'utilisation de la transformée de Laplace permet de remplacer le calcul de l'intégrale de convolution par un produit de transformées de Laplace dont le calcul est beaucoup plus aisé. La convolution sera explicitée en détail dans le chapitre III de ce cours.

2.5 La transformée de Laplace inverse

Pour l'étude des systèmes dynamique, la transformée de Laplace inverse ne se calcule pas avec l'intégrale de la transformée de Laplace inverse (non donnée dans ce cours, mais dont la formule existe). Le calcul se fait de manière pratique en 2 étapes :

1. La fonction en s obtenue, qui est une fraction rationnelle, est décomposée en éléments simples,
2. Connaissant les transformées de Laplace des signaux élémentaires et les propriétés des transformées de Laplace, les fonctions dans le domaine temporel sont trouvées par identification (avec l'aide de table des transformées).

La table des transformées de Laplace est disponible en Annexe A à la fin du fascicule.

2.5.1 La décomposition en éléments simples

Définition : les **racines** sont des valeurs qui annulent la fraction :

- les **zéros** sont les valeurs qui annulent le numérateur,
- les **pôles** sont les valeurs qui annulent le dénominateur.

La méthode issue de la littérature [3] ci-après n'est donnée qu'à titre indicatif. Utilisez-la, si vous le souhaitez. Sinon, vous pouvez utiliser la méthode de décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples que vous avez apprise et que vous maîtrisez. Il suffit que votre résultat soit exact.

► 2-5 INVERSE LAPLACE TRANSFORM BY PARTIAL-FRACTION EXPANSION

In a majority of the problems in control systems, the evaluation of the inverse Laplace transform does not rely on the use of the inversion integral of Eq. (2-124). Rather, the inverse Laplace transform operation involving rational functions can be carried out using a Laplace transform table and partial-fraction expansion, both of which can also be done by computer programs.

2-5-1 Partial-Fraction Expansion

When the Laplace transform solution of a differential equation is a rational function in s , it can be written as

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \tag{2-141}$$

where $P(s)$ and $Q(s)$ are polynomials of s . It is assumed that the order of $P(s)$ in s is greater than that of $Q(s)$. The polynomial $P(s)$ may be written

$$P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 \tag{2-142}$$

where a_0, a_1, \dots, a_{n-1} are real coefficients. The methods of partial-fraction expansion will now be given for the cases of simple poles, multiple-order poles, and complex-conjugate poles of $G(s)$.

$G(s)$ Has Simple Poles If all the poles of $G(s)$ are simple and real, Eq. (2-117) can be written as

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{Q(s)}{(s + s_1)(s + s_2) \cdots (s + s_n)} \tag{2-143}$$

where $s_1 \neq s_2 \neq \dots \neq s_n$. Applying the partial-fraction expansion, Eq. (2-143) is written

$$G(s) = \frac{K_{s1}}{s + s_1} + \frac{K_{s2}}{s + s_2} + \dots + \frac{K_{sn}}{s + s_n} \tag{2-144}$$

The coefficient K_{si} ($i = 1, 2, \dots, n$) is determined by multiplying both sides of Eq. (2-143) by the factor $(s + s_i)$ and then setting s equal to $-s_i$. To find the coefficient K_{s1} , for instance, we multiply both sides of Eq. (2-143) by $(s + s_1)$ and let $s = -s_1$. Thus,

$$K_{s1} = \left[(s + s_1) \frac{Q(s)}{P(s)} \right] \Big|_{s=-s_1} = \frac{Q(-s_1)}{(s_2 - s_1)(s_3 - s_1) \cdots (s_n - s_1)} \tag{2-145}$$

$G(s)$ Has Multiple-Order Poles If r of the n poles of $G(s)$ are identical, or we say that the pole at $s = -s_i$ is of multiplicity r , $G(s)$ is written

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{Q(s)}{(s + s_1)(s + s_2) \cdots (s + s_{n-r})(s + s_i)^r} \tag{2-152}$$

($i \neq 1, 2, \dots, n - r$), then $G(s)$ can be expanded as

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{K_{s1}}{s + s_1} + \frac{K_{s2}}{s + s_2} + \dots + \frac{K_{s(n-r)}}{s + s_{n-r}} \\ &\quad | \leftarrow n - r \text{ terms of simple poles} \rightarrow | \\ &\quad + \frac{A_1}{s + s_i} + \frac{A_2}{(s + s_i)^2} + \dots + \frac{A_r}{(s + s_i)^r} \\ &\quad | \leftarrow r \text{ terms of repeated poles} \rightarrow | \end{aligned} \tag{2-153}$$

Then $(n - r)$ coefficients, $K_{s1}, K_{s2}, \dots, K_{s(n-r)}$, which correspond to simple poles, may be evaluated by the method described by Eq. (2-145). The determination of the coefficients that correspond to the multiple-order poles is described as follows.

$$A_r = \left[(s + s_i)^r G(s) \right] \Big|_{s=-s_i} \tag{2-154}$$

$$A_{r-1} = \frac{d}{ds} \left[(s + s_i)^r G(s) \right] \Big|_{s=-s_i} \tag{2-155}$$

$$A_{r-2} = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} \left[(s + s_i)^r G(s) \right] \Big|_{s=-s_i} \tag{2-156}$$

⋮

$$A_1 = \frac{1}{(r - 1)!} \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} \left[(s + s_i)^r G(s) \right] \Big|_{s=-s_i} \tag{2-157}$$

2.5.2 Cas de pôles simples

— Soit une fonction $x(t)$ qui a pour transformée de Laplace $X(s)$ telle que :

$$X(s) = \frac{5s + 3}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$

Il y a 3 pôles $s = \{-1, -2, -3\}$. $X(s)$ peut donc être décomposée telle que :

$$X(s) = \frac{K_{-1}}{s + 1} + \frac{K_{-2}}{s + 2} + \frac{K_{-3}}{s + 3}$$

— Pour déterminer un des coefficients, on multiplie les 2 membres de l'équation par le dénominateur de la fraction dudit coefficient, et on met s égal à la racine du dénominateur (pôle).

Pour obtenir	Multiplier par	On pose $s = \dots$	Résultat
K_{-1}	$s + 1$	-1	$K_{-1} = -1$
K_{-2}	$s + 2$	-2	$K_{-2} = 7$
K_{-3}	$s + 3$	-3	$K_{-3} = -6$

— On obtient alors :

$$X(s) = \frac{-1}{s + 1} + \frac{7}{s + 2} + \frac{-6}{s + 3} \quad x(t) = -e^{-t} + 7e^{-2t} - 6e^{-3t}$$

Note : si les pôles simples sont complexes (toujours complexes conjugués pour les systèmes physiques), la décomposition peut être calculée de la même façon, on trouvera alors une solution temporelle avec des exponentielles complexes et des coefficients complexes. La solution devant être réelle, il faudra recombinaison des exponentielles complexes pour obtenir des sinus et des cosinus.

2.5.3 Cas de pôles multiples

— Soit une fonction $x(t)$ qui a pour transformée de Laplace $X(s)$ telle que :

$$X(s) = \frac{1}{s(s + 2)(s + 1)^3}$$

$X(s)$ peut être décomposée telle que :

$$X(s) = \frac{K_0}{s} + \frac{K_{-2}}{s + 2} + \frac{A_1}{s + 1} + \frac{A_2}{(s + 1)^2} + \frac{A_3}{(s + 1)^3}$$

$$K_0 = s.X(s) \Big|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$K_{-2} = (s + 2).X(s) \Big|_{s=-2} = \frac{1}{2}$$

$$A_3 = (s+1)^3 \cdot X(s) \Big|_{s=-1} = -1$$

$$A_2 = \frac{d}{ds} [(s+1)^3 \cdot X(s)] \Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s(s+2)} \right) \Big|_{s=-1} = \frac{-(2s+2)}{s^2(s+2)^2} \Big|_{s=-1} = 0$$

$$\left(\text{car } \frac{d}{du} \left(\frac{1}{u} \right) = -\frac{u'}{u^2} \right)$$

$$A_1 = \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2}{ds^2} [(s+1)^3 \cdot X(s)] \Big|_{s=-1} = \frac{1}{2!} \frac{d}{ds} \left(\frac{-(2s+2)}{s^2(s+2)^2} \right) \Big|_{s=-1}$$

$$= \frac{1}{2!} \cdot \frac{-2s^2(s+2)^2 + (2s+2)(4s^3 + 12s^2 + 8s)}{s^4(s+2)^4} \Big|_{s=-1} = -1$$

On obtient donc :

$$X(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(s+2)} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^3}$$

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2t} - e^{-t} - \frac{1}{2} t^2 e^{-t}$$

Note : la transformée $\frac{1}{(s+1)^3}$ peut être retrouvée comme ceci :

$$\mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{s^3} \rightarrow \mathcal{L}[t^2 e^{-t}] = \frac{2}{(s+1)^3} \rightarrow \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+1)^3} \right] = \frac{1}{2} t^2 e^{-t}$$

2.6 Résolution d'équations différentielles à coefficients constants à l'aide de la transformée de Laplace

2.6.1 Forme générale d'une équation différentielle

Une équation différentielle comporte une variable de sortie $y(t)$ matérialisant la dynamique du système, des coefficients et une variable d'entrée excitatrice $x(t)$:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = x(t)$$

On désire trouver $y(t)$.

- On suppose que les coefficients $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sont constants,
- y et les valeurs des dérivées de y sont connues à l'instant $t = 0$,
- Les conditions initiales sont en général normalisées à zéro pour simplifier l'obtention de la solution (mais ceci n'est pas toujours possible),
- La transformée de Laplace de l'équation différentielle permet d'obtenir un polynôme

en s d'ordre n :

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + a_{n-2} s^{n-2} Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = X(s)$$

, mais aussi représenté par le rapport de la sortie sur l'entrée tel que :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{\text{Sortie}}{\text{Entree}}$$

- Ce rapport $H(s)$ est appelé **fonction de transfert**. Elle est indépendante de l'entrée.
- Généralement, l'entrée du système étudié est connue, et donc $X(s)$ est connue. Il reste donc à déterminer $Y(s)$ pour résoudre l'équation.

2.6.2 Méthode de résolution d'une équation différentielle

Méthodologie :

1. L'équation différentielle est transformée en équation algébrique (domaine temporel \rightarrow domaine de Laplace)
2. On isole la valeur de $Y(s)$ qui est la transformation de Laplace de $y(t)$. La fraction obtenue est décomposée en éléments simples en s ,
3. On prend la transformation inverse pour obtenir la solution de l'équation en t .

On résout ainsi l'équation différentielle d'origine (voir Figure 2.10). C'est la même procédure pour les équations différentielles d'ordre 1, 2, 3, etc.

2.6.3 Exemple : Équation différentielle du 1^{er} ordre

- Résoudre l'équation suivante par la méthode des fractions partielles ou décomposition en éléments simples. Ici, nous utiliserons une autre méthode que celle vue précédemment : par réduction au même dénominateur.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + y = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow sy(s) - y(0) + y(s) = \frac{1}{s}$$

$$y(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} = \frac{As + A + Bs}{s(s+1)}$$

$$\begin{cases} s^0 : A = 1 \\ s^1 : A + B = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

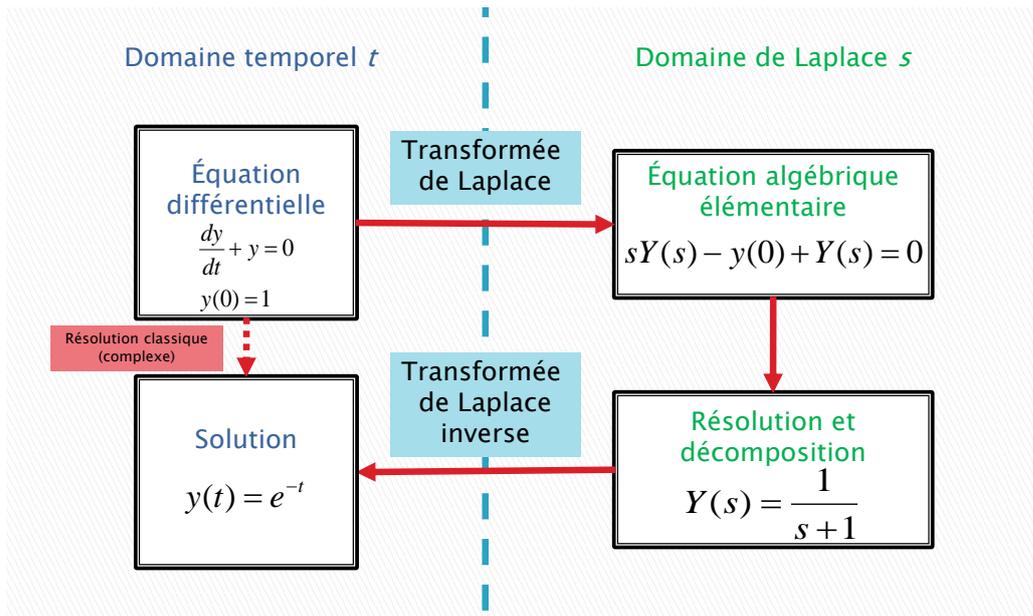


FIGURE 2.10 – Méthodologie globale pour la résolution d’une équation différentielle avec Laplace.

$$y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

$$y(t) = 1 - e^{-t}$$

On peut vérifier et retrouver $y(0)$ au final (ceci est utile pour vérifier que l’on n’a pas fait d’erreur de calcul...).

Exercice : retrouver la même solution avec la méthode vue dans la Section 2.5.2.

2.6.4 Exemple : Équation différentielle d’ordre n avec racines réelles

— Résoudre l’équation suivante par la méthode des fractions partielles :

$$\begin{cases} \frac{d^3 y}{dt^3} + 2\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2y = 4 + e^{2t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = -1 \end{cases}$$

$$\rightarrow [s^3 y(s) - s^2 + 1] + 2[s^2 y(s) - s] - [s y(s) - 1] - 2y(s) = \frac{4}{s} + \frac{1}{s-2}$$

$$y(s) = \frac{s^4 - 6s^2 + 9s - 8}{s(s-2)(s^3 + 2s^2 - s - 2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s+2} + \frac{E}{s-1}$$

Pour obtenir	Multiplier par	On pose $s =$	Résultat
A	s	0	$A = -2$
B	s-2	2	$B = \frac{1}{12}$
C	s+1	-1	$C = \frac{11}{3}$
D	s+2	-2	$D = \frac{-17}{12}$
E	s-1	1	$E = \frac{2}{3}$

$$y(t) = -2 + \frac{1}{12}e^{2t} + \frac{11}{3}e^{-t} - \frac{17}{12}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^t$$

On peut vérifier et retrouver $y(0)$ au final.

2.6.5 Exemple : Équation différentielle d'ordre n avec racines complexes

Il y a deux méthodes pour décomposer la fraction rationnelle comprenant les racines complexes.

1. Calculer les coefficients classiquement (voir Section 2.5.3) avec des racines complexes. On trouvera des coefficients complexes. La réponse temporelle comprendra des coefficients complexes et des exponentielles complexes. Il faudra alors les recombinaison pour faire apparaître des sinus et cosinus.
2. **Si et seulement si il y a deux racines complexes conjuguées**, on peut faire la décomposition en fractions rationnelles de la façon suivante :

$$X(s) = \frac{P(s)}{s(s^2 + bs + c)}$$

$$X(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{(s^2 + bs + c)}$$

Dans l'exemple suivant, la résolution de l'équation différentielle est présentée selon la méthode 2. Le choix de la méthode se fait selon ses préférences personnelles.

Exemple 1 :

— À l'aide de la transformée de Laplace, résolvez l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = 2 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow [s^2 y(s) - sy(0) - y'(0)] + 2[sy(s) - y(0)] + 2y(s) = \frac{2}{s}$$

$$\frac{y(s)}{x(s)} = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 8 = -4 = (rj)^2 = (2j)^2 < 0$$

$$\begin{cases} s_1 = \frac{-b-rj}{2a} = -1 - j \\ s_2 = \frac{-b+rj}{2a} = -1 + j \end{cases}$$

$$y(s) = \frac{2}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 1 + j} + \frac{C}{s + 1 - j}$$

- Cela mène à la somme d'un sinus et d'un cosinus,
- La méthode la plus simple ici est de faire apparaître les fonctions cosinus et sinus. On sait que :

$$\mathcal{L}[e^{-at} \sin(kt)] = \frac{k}{(s+a)^2 + k^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cos(kt)] = \frac{(s+a)}{(s+a)^2 + k^2}$$

- $s^2 + 2s + 2$ n'est pas factorisable, on cherche A, B et C tels que :

$$y(s) = \frac{2}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2s + 2}$$

$$y(s) = \frac{As^2 + 2As + 2A + Bs^2 + Cs}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

$$\begin{cases} s^0 : 2A = 2 \\ s^1 : 2A + C = 0 \\ s^2 : A + B = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ C = -2A = -2 \\ B = -A = -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{2}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{1}{s} - \frac{s+2}{s^2 + 2s + 2} = \frac{1}{s} - \frac{(s+1) + 1}{(s+1)^2 + 1^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{(s+1)}{(s+1)^2 + 1^2} - \frac{1}{(s+1)^2 + 1^2} \end{aligned}$$

On inverse chacune des fractions partielles pour repasser dans le domaine temporel :

$$y(t) = 1 - e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t$$

$$y(t) = 1 - e^{-t}(\cos t + \sin t)$$

Exemple 2 :

- Cet exemple (tiré de [1]) sera traité successivement avec les 2 méthodes de décomposi-

tions vues précédemment :

— À l'aide de la transformée de Laplace, résolvez l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 6x = 1 \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 3 \end{cases}$$

Méthode 1

$$X(s) = \frac{1+3s}{s(s^2+3s+6)} = \frac{1+3s}{s\left(s+\frac{3+j\sqrt{15}}{2}\right)\left(s+\frac{3-j\sqrt{15}}{2}\right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\frac{3+j\sqrt{15}}{2}} + \frac{C}{s+\frac{3-j\sqrt{15}}{2}}$$

$$A = \frac{1}{6}$$

$$B = \frac{1+3s}{s\left(s+\frac{3-j\sqrt{15}}{2}\right)} \Bigg|_{s=\frac{-3-j\sqrt{15}}{2}} = \frac{1+3\cdot\frac{-3-j\sqrt{15}}{2}}{\left(\frac{-3-j\sqrt{15}}{2}\right)\left(\frac{-3-j\sqrt{15}}{2}+\frac{3-j\sqrt{15}}{2}\right)} = \frac{1-\frac{9}{2}-\frac{3j\sqrt{15}}{2}}{\left(\frac{-3-j\sqrt{15}}{2}\right)(-j\sqrt{15})}$$

$$B = \frac{-\frac{7}{2}-\frac{3j\sqrt{15}}{2}}{\left(\frac{3}{2}j\sqrt{15}\right)-\frac{15}{2}} = \frac{-7-3j\sqrt{15}}{-15+3j\sqrt{15}} = \frac{(-7-3j\sqrt{15})(-15-3j\sqrt{15})}{(15)^2+9\cdot 15} = \frac{7\cdot 15+7\cdot 3j\sqrt{15}+15\cdot 3j\sqrt{15}+(3j\sqrt{15})^2}{15\cdot 24}$$

$$B = \frac{-30+66j\sqrt{15}}{15\cdot 24} = \frac{-15+33j\sqrt{15}}{15\cdot 12}$$

$$C = \frac{1+3s}{s\left(s+\frac{3+j\sqrt{15}}{2}\right)} \Bigg|_{s=\frac{-3+j\sqrt{15}}{2}} = \frac{1+3\cdot\frac{-3+j\sqrt{15}}{2}}{\left(\frac{-3+j\sqrt{15}}{2}\right)\left(\frac{-3+j\sqrt{15}}{2}+\frac{3+j\sqrt{15}}{2}\right)} = \frac{1-\frac{9}{2}+\frac{3j\sqrt{15}}{2}}{\left(\frac{-3+j\sqrt{15}}{2}\right)(j\sqrt{15})}$$

$$C = \frac{-\frac{7}{2}+\frac{3j\sqrt{15}}{2}}{\left(-\frac{3}{2}j\sqrt{15}\right)-\frac{15}{2}} = \frac{-7+3j\sqrt{15}}{-15-3j\sqrt{15}} = \frac{(-7+3j\sqrt{15})(-15+3j\sqrt{15})}{(15)^2+9\cdot 15} = \frac{7\cdot 15-7\cdot 3j\sqrt{15}-15\cdot 3j\sqrt{15}+(3j\sqrt{15})^2}{15\cdot 24}$$

$$C = \frac{-30-66j\sqrt{15}}{15\cdot 24} = \frac{-15-33j\sqrt{15}}{15\cdot 12}$$

$$X(s) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{s} + \frac{-15+33j\sqrt{15}}{15\cdot 12} \cdot \frac{1}{s+\frac{3+j\sqrt{15}}{2}} + \frac{-15-33j\sqrt{15}}{15\cdot 12} \cdot \frac{1}{s+\frac{3-j\sqrt{15}}{2}}$$

$$x(t) = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{-15+33j\sqrt{15}}{15\cdot 2} \cdot e^{\left(\frac{3+j\sqrt{15}}{2}\right)t} + \frac{-15-33j\sqrt{15}}{15\cdot 2} \cdot e^{\left(\frac{3-j\sqrt{15}}{2}\right)t} \right) = \frac{1}{6} \left(1 + e^{\frac{3}{2}t} \left(\frac{-15+33j\sqrt{15}}{15\cdot 2} \cdot e^{\left(\frac{j\sqrt{15}}{2}\right)t} + \frac{-15-33j\sqrt{15}}{15\cdot 2} \cdot e^{\left(\frac{-j\sqrt{15}}{2}\right)t} \right) \right)$$

$$x(t) = \frac{1}{6} \left(1 + e^{\frac{3}{2}t} \left(\frac{e^{\left(\frac{j\sqrt{15}}{2}\right)t} + e^{\left(\frac{-j\sqrt{15}}{2}\right)t}}{2} \right) + \frac{33j}{\sqrt{15}} \left(\frac{e^{\left(\frac{j\sqrt{15}}{2}\right)t} - e^{\left(\frac{-j\sqrt{15}}{2}\right)t}}{2} \right) \right) = \frac{1}{6} \left(1 + e^{\frac{3}{2}t} \left(\frac{e^{\left(\frac{j\sqrt{15}}{2}\right)t} + e^{\left(\frac{-j\sqrt{15}}{2}\right)t}}{2} \right) + \frac{33}{\sqrt{15}} \left(\frac{e^{\left(\frac{j\sqrt{15}}{2}\right)t} - e^{\left(\frac{-j\sqrt{15}}{2}\right)t}}{2j} \right) \right)$$

Réponse : $x(t) = \frac{1}{6} \left(1 + e^{\frac{3}{2}t} \left(-\cos\frac{\sqrt{15}}{2}t + \frac{33}{\sqrt{15}} \sin\frac{\sqrt{15}}{2}t \right) \right)$ pour $t \geq 0$

Méthode 2

$$s^2 X(s) - sx(0) - \frac{dx(0)}{dt} + 3sX(s) - 3x(0) + 6X(s) = \frac{1}{s}$$

$$s^2 X(s) - 3 + 3sX(s) + 6X(s) = \frac{1}{s}$$

$$X(s)(s^2 + 3s + 6) = \frac{1}{s} + 3$$

$$X(s) = \frac{1 + 3s}{s(s^2 + 3s + 6)} \quad (s + \alpha) + \beta$$

Racines complexes conjuguées: $\frac{-3 \pm j\sqrt{15}}{2}$

$$X(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 3s + 6}$$

$$A = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1 + 3s}{s(s^2 + 3s + 6)} - \frac{1}{6s} = \frac{Bs + C}{s^2 + 3s + 6}$$

$$\frac{6 + 18s - s^2 - 3s - 6}{6s(s^2 + 3s + 6)} = \frac{-s + 15}{6(s^2 + 3s + 6)} \quad \text{donc } B = -\frac{1}{6} \text{ et } C = \frac{15}{6}$$

$$X(s) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{s} + \frac{-s + 15}{s^2 + 3s + 6} \right) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{s} + \frac{-s + 15}{\left(s + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{15}{4}\right)} \right) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{s} + \frac{-\left(s + \frac{3}{2}\right) + \frac{33}{2}}{\left(s + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2} \right)$$

$$X(s) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{s} - \frac{\left(s + \frac{3}{2}\right)}{\left(s + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2} + \frac{33}{2\sqrt{15}} \frac{\frac{\sqrt{15}}{2}}{\left(s + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2} \right) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{s} - \frac{\left(s + \frac{3}{2}\right)}{\left(s + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2} + \frac{33}{\sqrt{15}} \frac{\frac{\sqrt{15}}{2}}{\left(s + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2} \right)$$

Réponse : $x(t) = \frac{1}{6} \left(1 + e^{-\frac{3}{2}t} \left(-\cos \frac{\sqrt{15}}{2} t + \frac{33}{\sqrt{15}} \sin \frac{\sqrt{15}}{2} t \right) \right)$ pour $t \geq 0$

On veut faire apparaître le dénominateur sous la forme $(s + \alpha)^2 + \omega^2$ et le numérateur sous la forme $(s + \alpha) + \beta$

3 La convolution

3.1 Introduction

La notion de convolution paraît souvent difficile à comprendre alors qu'elle représente une opération très courante en sciences et techniques et que le but de la convolution est simple. Il s'agit tout simplement de calculer la réponse d'un système à un signal d'entrée quelconque. Ce signal met en jeu de manière générale une variable x . En automatique, le signal sera temporel, c'est pourquoi nous utiliserons de préférence la variable t dans les définitions et calculs.

3.2 Définition

Question : connaissant un système linéaire caractérisé par sa réponse impulsionnelle $h(t)$ et un signal $e(t)$ introduit à l'entrée du système, peut-on calculer le signal de sortie $s(t)$?

Oui, c'est la convolution entre $e(t)$ et $h(t)$.



Note : s est strictement fonction de t car l'intégrale se fait par rapport à τ . Dans l'intégrale, τ est la variable, et t (ou x) est une constante, car nous évaluons s pour un t donné. Lorsque vous regardez cette intégrale, imaginez que t est une valeur fixe, donc l'intégrale donne un nombre. Pour une valeur fixe différente de t , la fonction h est décalée d'une quantité différente, de sorte que l'intégrale donne un nombre différent (probablement). Enfin, imaginez que vous vous intéressez à toutes les valeurs de l'intégrale, car t varie : vous avez maintenant une fonction de t .

Autre question : supposons que l'on dispose d'un système linéaire. Nous savons qu'il fait une convolution, mais nous ne savons pas avec quoi il convolue l'entrée. Supposons que le

système est une boîte noire que nous ne pouvons pas "ouvrir" pour déterminer quelle est la fonction $h(t)$ avec laquelle l'entrée est convoluée. La question que nous posons est de savoir s'il existe une entrée spécifique que nous pourrions appliquer au système de sorte que sa sortie soit $h(t)$?

Quelle entrée e produira la sortie $s = h$?

$$h(t) = \int_0^t ?(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

C'est l'impulsion unité (d'où la "réponse impulsionnelle"...)

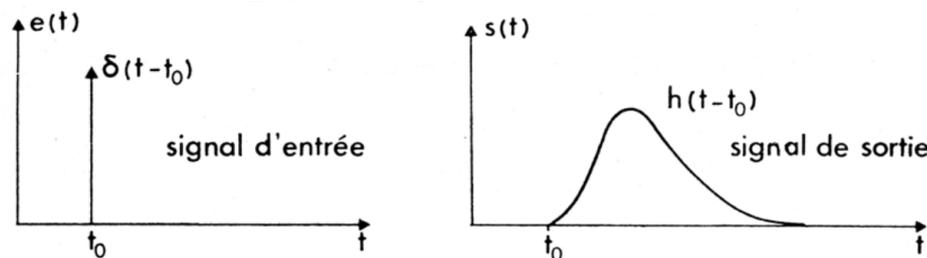


FIGURE 3.1 – La réponse impulsionnelle d'un système est mesurée en appliquant une impulsion en entrée du système.

Ce signal, réponse à une impulsion infiniment brève, est appelé réponse impulsionnelle (ou encore réponse percussionnelle). Le fait que le système traduise un signal infiniment bref par un signal de durée infinie va évidemment déformer un signal quelconque qui est injecté à son entrée. Connaissant la réponse impulsionnelle $h(t)$ d'un système supposé linéaire et un signal d'entrée $e(t)$, peut-on déterminer, par le calcul, le signal de sortie $s(t)$? C'est le problème qui a pour solution l'équation de convolution (voir Section suivante pour la démonstration).

En électronique, une impulsion infiniment brève, injectée à l'entrée d'un amplificateur, ne donne jamais en sortie une impulsion infiniment brève, mais un signal de durée non nulle.

De manière analogue, examinons la réponse impulsionnelle d'un véritable système d'imagerie : l'œil humain. Nous savons que l'œil a une lentille qui forme une image sur la rétine. Nous voulons connaître la relation entre l'image parfaite de la scène — une image focalisée — et l'image qui est reçue par la rétine. Nous voulons donc trouver la réponse impulsionnelle de l'œil humain. Ce système est bidimensionnel puisque la rétine est bidimensionnelle. Ainsi, si nous pouvons entrer dans l'œil une fonction d'impulsion bidimensionnelle, $e(x, y)$, nous pouvons mesurer sa réponse impulsionnelle $h(x, y)$. Qu'est-ce que cela signifie de réellement stimuler l'œil avec une impulsion δ ? Un exemple d'une telle source est une étoile lointaine. L'image qui se forme sur la rétine est alors la réponse impulsionnelle de l'œil. Dans le cas d'un système d'imagerie, la réponse impulsionnelle est souvent appelée fonction PSF ("Point Spread Function"). Sur la Figure 3.2, la fonction PSF de l'œil humain qui a été mesurée expé-

rimentalement. Puisque la rétine est courbée, la fonction est décrite en utilisant des angles plutôt que des coordonnées cartésiennes.

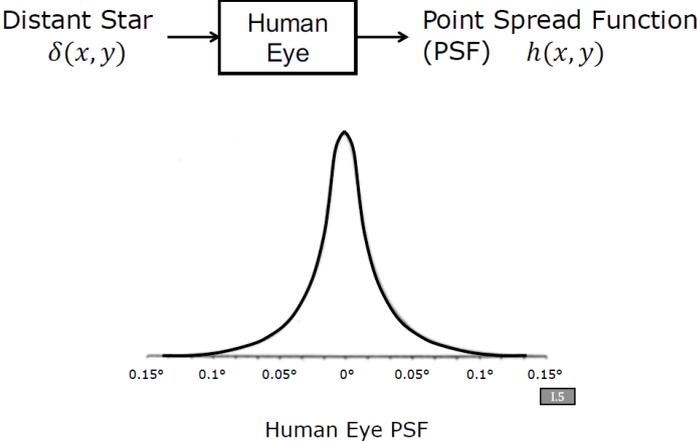


FIGURE 3.2 – La réponse impulsionnelle de l’œil humain.

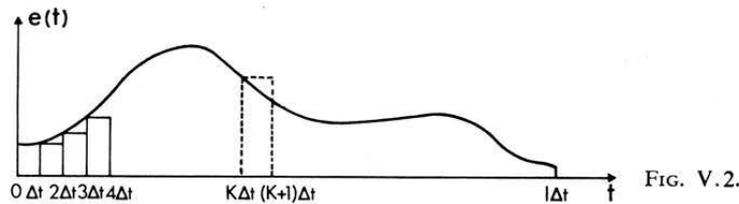
3.3 Équation de convolution

— L'équation de convolution suivante est tirée de [4].

Équation de convolution

Considérons un signal d'entrée quelconque $e(t)$, il nous est toujours possible de décomposer ce signal $e(t)$ en une suite d'impulsions de largeur Δt , l'amplitude de chacune d'elles étant égale à l'amplitude du signal (fig. V. 2) à l'instant considéré.

Soit $e(0)$, $e(\Delta t)$, $e(2 \Delta t)$, ..., $e(k \Delta t)$, ... les valeurs de $e(t)$ aux instants 0 , Δt , $2 \Delta t$, ..., $k \Delta t$, ...



Soit $h_1(t)$ la réponse du système à une impulsion de largeur Δt et de hauteur $1/\Delta t$; $h_1(t) \Delta t$ sera la réponse à une impulsion de largeur Δt et de hauteur unité.

L'impulsion d'amplitude $e(0)$, intervenant à l'instant $t = 0$, va donner un signal de sortie $s_0 = e(0) \cdot h_1(t) \cdot \Delta t$.

L'impulsion d'amplitude $e(\Delta t)$ intervenant à l'instant $t = \Delta t$ va donner un signal de sortie $s_{\Delta t} = e(\Delta t) \cdot h_1(t - \Delta t) \cdot \Delta t$.

On aura donc la suite

$$\left. \begin{aligned} s_0 &= e(0) \cdot h_1(t) \cdot \Delta t \\ s_{\Delta t} &= e(\Delta t) \cdot h_1(t - \Delta t) \cdot \Delta t \\ &\vdots \\ s_{k\Delta t} &= e(k \Delta t) \cdot h_1(t - k \Delta t) \cdot \Delta t \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (V.1)$$

Puisque le système est linéaire, on peut lui appliquer le théorème de superposition et la sortie sera la somme des contributions de chaque $e(k \Delta t)$ jusqu'à l'instant considéré

$$s(t) = \sum_{k=0}^l e(k \Delta t) \cdot h_1(t - k \Delta t) \cdot \Delta t \quad (V.2)$$

$$l = \text{partie entière de } \frac{t}{\Delta t}.$$

Mais il faut remarquer que si $h_1(t)$ est la réponse du système physique, en vertu du principe de causalité, $h_1(t)$ ne peut exister pour $t < 0$ (l'effet ne peut précéder la cause) donc

$$h_1(t - k \Delta t) \equiv 0 \quad \text{pour } t < k \Delta t.$$

(*) $\delta(t)$ est l'impulsion de Dirac ; c'est une impulsion rectangulaire de surface unité et de largeur (durée) infiniment petite (voir chap. II. 6. 7).

On peut donc écrire

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e(k \Delta t) h_1(t - k \Delta t) \Delta t \quad (\text{V.2 bis})$$

ou même

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(k \Delta t) h_1(t - k \Delta t) \Delta t .$$

Si l'on fait tendre Δt vers zéro, la suite des $e(k \Delta t)$ tend vers la fonction $e(t)$.

De même, lorsque Δt tend vers zéro, $h_1(t)$ tend vers $h(t)$ réponse impulsionnelle du système. La somme tend vers une intégrale et on a

$$s(t) = \int_0^t e(\tau) h(t - \tau) d\tau , \quad (\text{V.3})$$

pour la même raison, on peut écrire cette équation sous les formes

$$s(t) = \int_0^t e(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (\text{V.3 bis})$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau) h(t - \tau) d\tau . \quad (\text{V.3 ter})$$

L'équation de convolution s'écrit symboliquement

$$s(t) = e(t) * h(t) . \quad (\text{V.4})$$

— L'opération convolution est distributive

$$a(t) * [b(t) + c(t)] = a(t) * b(t) + a(t) * c(t) .$$

— L'opération convolution est commutative et associative

$$a(t) * b(t) * c(t) = a(t) * c(t) * b(t) = c(t) * b(t) * a(t) = \text{etc.}$$

$$[a(t) * b(t)] * c(t) = a(t) * [b(t) * c(t)] = a(t) * b(t) * c(t) .$$

L'équation de convolution ci-dessus appelle quelques remarques

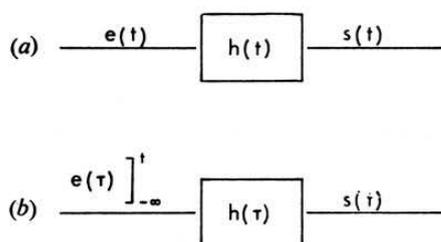


FIG. V.3.

V.3.1. — Il est inexact de représenter cette opération par le schéma V.3a car le signal de sortie à l'instant t ne dépend pas de la seule valeur de $h(t)$ à l'instant t et de la seule valeur du signal d'entrée $e(t)$ à l'instant t . Le signal de sortie à l'instant t dépend théoriquement de toute l'histoire du signal $e(t)$.

Le schéma correct serait donc le schéma V.3b.

3.4 Principe

- Les figures suivantes illustrent ce qu'est en réalité l'opération de convolution. Ces figures décrivent les 7 étapes pour résoudre l'équation de convolution (la variable indépendante¹ ici est x et non t , et la convolution est faite sur $[-\infty, +\infty]$) :

$$g(x) = f(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(x - \tau) d\tau$$

- **Étape 1** : On désire réaliser la convolution entre les 2 fonctions $f(x)$ et $h(x)$. On remplace la variable x par τ .

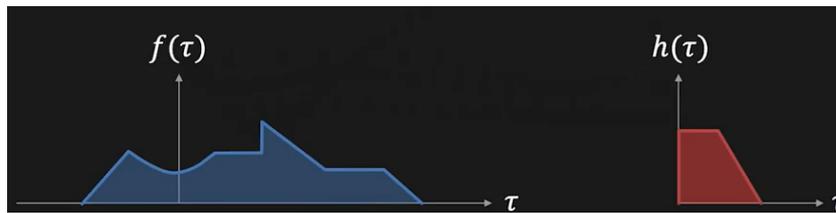


FIGURE 3.3 – Les 2 signaux nommés f et h .

- **Étape 2** : On prend $h(\tau)$ et on la retourne par rapport à l'axe vertical pour obtenir $h(-\tau)$, comme indiqué ci-dessous (**Attention** : certaines figures ci-dessous sont des gif, vous devez ouvrir le cours PDF avec Adobe Reader pour voir les animations).

FIGURE 3.4

- **Étape 3** : Nous décalons $h(-\tau)$ de x pour obtenir $h(x - \tau)$, comme le montre la figure ci-après.

FIGURE 3.5 – Obtention de $h(x - \tau)$.

- **Étape 4** : On superpose $h(x - \tau)$ sur $f(\tau)$.

I. paramètre du problème qui varie sans être influencé par les autres paramètres du problème.

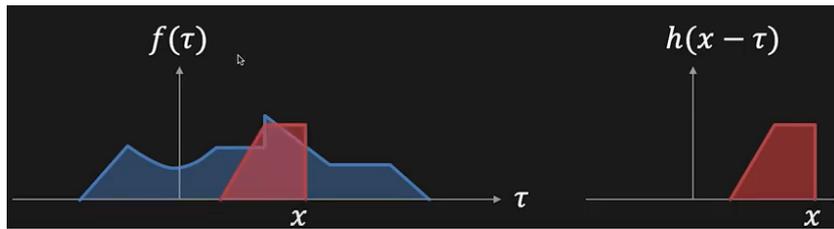


FIGURE 3.6 – Superposition sur f .

— **Étape 5** : On prend le produit $f(\tau)h(x - \tau)$ de ces deux fonctions qui se chevauchent.

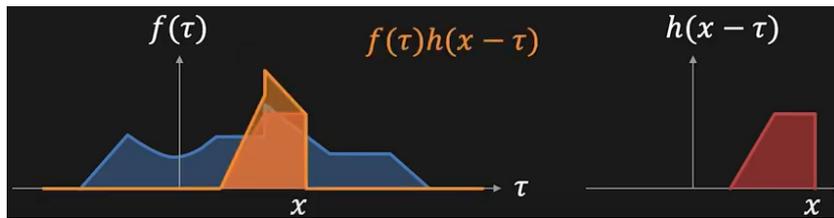


FIGURE 3.7 – Multiplication de $f(\tau)$ et $h(x - \tau)$.

— **Étape 6** : On calcule l'intégrale du produit. Cela nous donne un nombre unique, qui est le résultat de la convolution au point x .

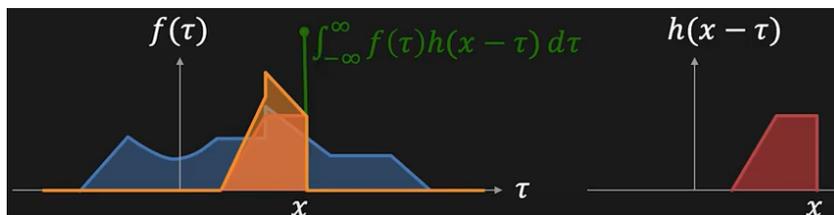


FIGURE 3.8 – Intégrale du produit.

— **Étape 7** : Pour trouver la fonction entière $g(x)$, on décale $h(-\tau)$ vers $-\infty$, c'est-à-dire que le décalage x dans $h(x - \tau)$ est égal à $-\infty$. On fait ensuite varier le décalage de $-\infty$ à $+\infty$ en faisant glisser la fonction $h(-\tau)$ de gauche à droite. Pour chaque valeur de décalage x , nous trouvons le produit des deux fonctions, puis l'intégrale du produit. Cela nous donne $g(x)$, qui est le résultat de la convolution.

FIGURE 3.9 – Obtention du résultat de convolution.

Une démonstration animée de la convolution est présente sur ce site web : <https://lpsa.swarthmore.edu/Convolution/CI.html>. Vous pourrez sélectionner différents scénarios (échelon/exponentielle, impulsion/rampe, etc.), et faire varier le décalage de $-\infty$ à $+\infty$ avec un curseur.

3.5 Exemple 1 : calcul de la convolution de deux fonctions

On désire calculer la convolution entre les 2 signaux suivants en utilisant l'intégrale de convolution :

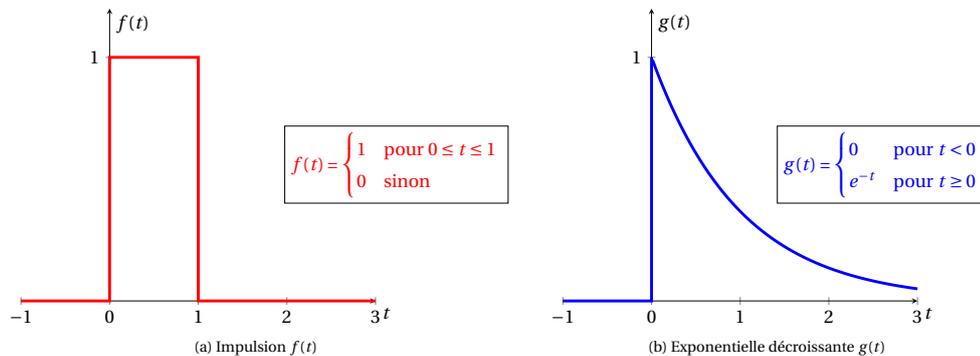


FIGURE 3.10 – Les 2 signaux dont on veut faire la convolution.

- Comme la convolution est commutative ($c(t) = g(t) * f(t) = f(t) * g(t)$), on peut décaler soit $f(t)$ soit $g(t)$. On doit trouver le même résultat.

3.5.1 Décalage de $g(\tau)$

$$c(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)e^{-(t-\tau)}d\tau$$

Il y a 2 zones distinctes selon la valeur de la translation t :

- **Zone 1** : $0 \leq t \leq 1$

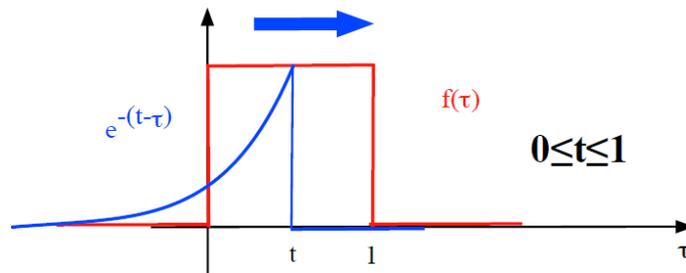


FIGURE 3.11 – Zone 1 : $0 \leq t \leq 1$

$$c(t) = \int_0^t f(\tau)e^{-(t-\tau)} d\tau = \int_0^t 1 \cdot e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-t} \int_0^t e^{\tau} d\tau = e^{-t} (e^t - 1) = 1 - e^{-t}$$

— **Zone 2 :** $t > 1$

Ici, il faut faire très attention aux bornes d'intégration...

$$c(t) = \int_0^t f(\tau)e^{-(t-\tau)} d\tau = \int_0^1 1 \cdot e^{-(t-\tau)} d\tau + \int_1^t 0 \cdot e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-t} \int_0^1 e^{\tau} d\tau = e^{-t} [e^{\tau}]_0^1 = e^{-t} (e^1 - 1)$$

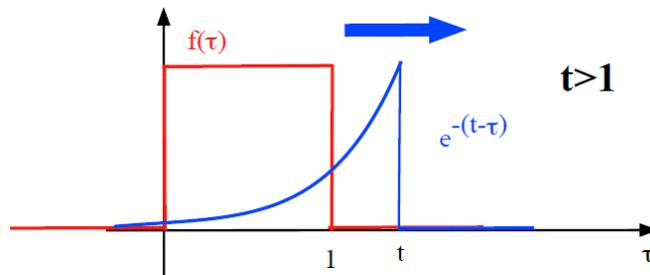


FIGURE 3.12 – Zone 2 : $t > 1$

— Pour les 2 zones, on trouve pour $t = 1$, $c(1) = 0.632$.

3.5.2 Décalage de $f(\tau)$

— **Zone 1 :** $0 \leq t \leq 1$

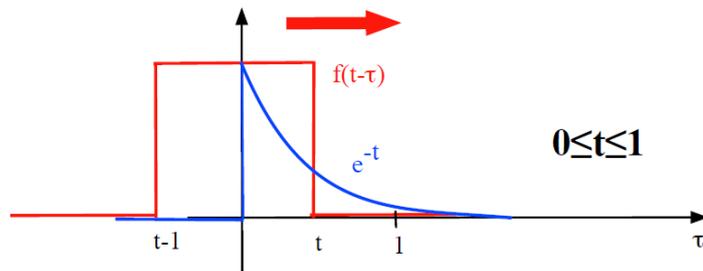


FIGURE 3.13 – Zone 1 : $0 \leq t \leq 1$

$$c(t) = \int_0^t e^{-\tau} f(t-\tau) d\tau = \int_0^t e^{-\tau} \cdot 1 d\tau = -[e^{-\tau}]_0^t = -(e^{-t} - 1) = 1 - e^{-t}$$

— **Zone 2 : $t > 1$**

$$c(t) = \int_0^t e^{-\tau} f(t-\tau) d\tau = \int_0^{t-1} e^{-\tau} \cdot 0 d\tau + \int_{t-1}^t e^{-\tau} \cdot 1 d\tau = -[e^{-\tau}]_{t-1}^t = -(e^{-t} - e^{-(t-1)}) = e^{-t} (e^1 - 1)$$

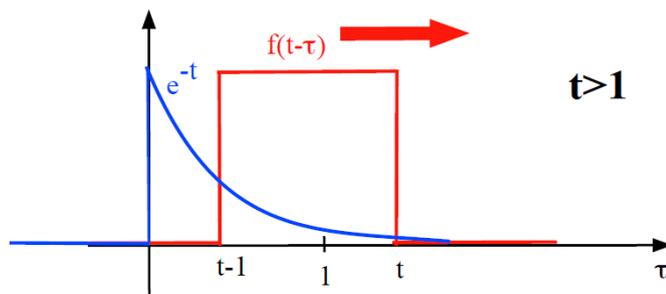


FIGURE 3.14 – Zone 2 : $t > 1$

- On trouve donc le même résultat, quel que soit le signal translaté. Ceci confirme la commutativité de la convolution.
- La fonction $c(t)$ est visible sur la Figure 3.15.

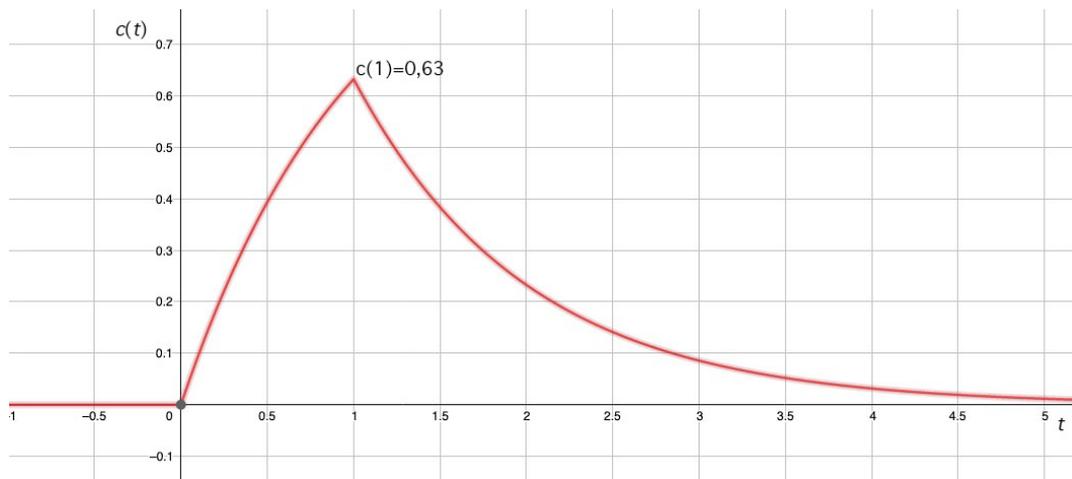


FIGURE 3.15 – Forme de $c(t)$ pour l'exemple 1. Cela ressemble à une charge et décharge d'un condensateur dans un circuit RC, où f serait le signal d'entrée (tension appliquée), g la réponse impulsionnelle du circuit RC, et c la tension aux bornes du condensateur.

3.6 Exemple 2 : calcul de la convolution de deux fonctions

L'exemple précédent est un peu compliqué, car $f(t)$ n'est pas continue ou définie de 0 à $+\infty$, ce qui entraîne l'étude de deux cas selon la valeur de t . Dans l'exemple suivant, les deux fonctions à convoluer sont définies de 0 à $+\infty$.

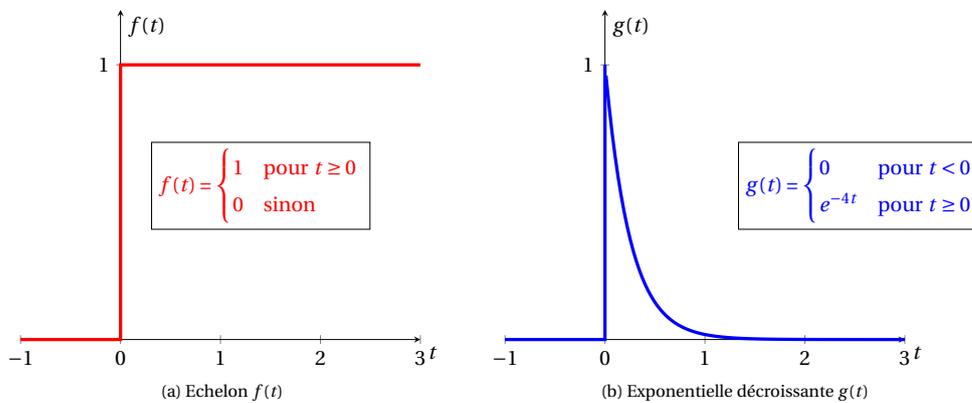


FIGURE 3.16 – Les 2 signaux dont on veut faire la convolution.

De la même manière que pour l'exemple 1 :

$$c(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

$$c(t) = \int_0^t 1 \cdot e^{-4(t-\tau)} d\tau = e^{-4t} \int_0^t 1 \cdot e^{4\tau} d\tau = \frac{1}{4} e^{-4t} [e^{4\tau}]_0^t = \frac{1}{4} e^{-4t} (e^{4t} - 1) = \frac{1}{4} (1 - e^{-4t})$$

La Figure 3.17 représente la forme de $c(t)$.

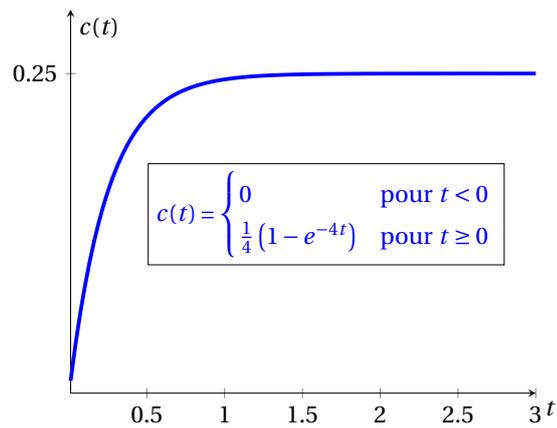


FIGURE 3.17 – Forme de $c(t)$ pour l'exemple 2. Le résultat de convolution est continue sur $[0, +\infty]$.

Dans la page suivante, il y a 2 autres exemples de calcul tirés de la littérature [8]. Avant cela, petit rappel sur la manipulation des fonctions trigonométriques :

$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$	
<p>Formules d'addition et de différence des arcs</p> $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$	<p>Formules d'addition et de différence</p> $\cos(A + B) + \cos(A - B) = 2 \cos A \cos B,$ $\cos(A + B) - \cos(A - B) = -2 \sin A \sin B,$ $\sin(A + B) + \sin(A - B) = 2 \sin A \cos B,$ $\sin(A + B) - \sin(A - B) = 2 \cos A \sin B.$

En utilisant le théorème de convolution, évaluer les expressions suivantes

$$(a) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}, \quad (b) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)^2}\right\}.$$

(a) Nous pouvons écrire $\frac{s}{(s^2+a^2)^2} = \frac{s}{s^2+a^2} \cdot \frac{1}{s^2+a^2}$. D'où, puisque

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos at$ et $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \frac{\sin at}{a}$, nous avons, d'après le théorème de convolution

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} &= \int_0^t \cos au \cdot \frac{\sin a(t-u)}{a} du \\ &= \frac{1}{a} \int_0^t (\cos au)(\sin at \cos au - \cos at \sin au) du \\ &= \frac{1}{a} \sin at \int_0^t \cos^2 au du - \frac{1}{a} \cos at \int_0^t \sin au \cos au du \\ &= \frac{1}{a} \sin at \int_0^t \left(\frac{1+\cos 2au}{2}\right) du - \frac{1}{a} \cos at \int_0^t \frac{\sin 2au}{2} du \\ &= \frac{1}{a} \sin at \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2at}{4a}\right) - \frac{1}{a} \cos at \left(\frac{1-\cos 2at}{4a}\right) \\ &= \frac{1}{a} \sin at \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin at \cos at}{2a}\right) - \frac{1}{a} \cos at \left(\frac{\sin^2 at}{2a}\right) \\ &= \frac{t \sin at}{2a} \end{aligned}$$

(b) Nous avons $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} = te^{-t}$. D'où, d'après le théorème de convolution

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)^2}\right\} &= \int_0^t (ue^{-u})(t-u) du \\ &= \int_0^t (ut - u^2) e^{-u} du \\ &= (ut - u^2)(-e^{-u}) - (t - 2u)(e^{-u}) + (-2)(-e^{-u}) \Big|_0^t \\ &= te^{-t} + 2e^{-t} + t - 2 \end{aligned}$$

Vérification :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{te^{-t} + 2e^{-t} + t - 2\} &= \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s} \\ &= \frac{s^2 + 2s^2(s+1) + (s+1)^2 - 2s(s+1)^2}{s^2(s+1)^2} = \frac{1}{s^2(s+1)^2} \end{aligned}$$

3.7 Convolution et transformée de Laplace

Il est possible d'utiliser l'intégrale de convolution pour calculer une transformée de Laplace. Pourquoi est-ce utile? Dans certains cas, cela simplifie le calcul de la transformée inverse de Laplace. Il s'avère qu'il existe des algorithmes très rapides pour trouver la transformée de Fourier et la transformée de Fourier inverse. Par exemple, lorsque nous avons un très grand filtre 2D avec lequel nous voulons convoluer une image, il est beaucoup moins cher et donc beaucoup plus efficace de faire la convolution dans le domaine fréquentiel. De plus, cela nous permet de comprendre les effets de l'application d'un filtre.

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$$

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} G(s)$$

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = \mathcal{L}\left[\int_0^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right] = F(s)G(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f(t) * g(t)]] = f(t) * g(t)$$

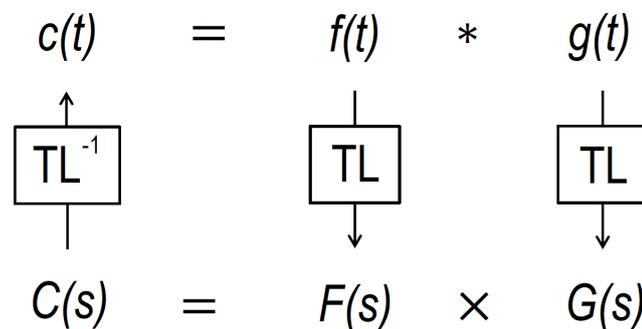


FIGURE 3.18 – L'opérateur de convolution est une multiplication dans le domaine de Laplace (propriété également valable lorsque l'on travaille avec la transformée de Fourier).

3.8 Autres applications

3.8.1 Le traitement d'images ("Computer Vision")

Dans le traitement d'image, le filtrage convolutif peut être utilisé pour implémenter des algorithmes tels que la détection des contours, l'augmentation de la netteté de l'image ou le floutage de l'image.

Cela se fait en sélectionnant un noyau approprié (matrice de convolution) à l'application.

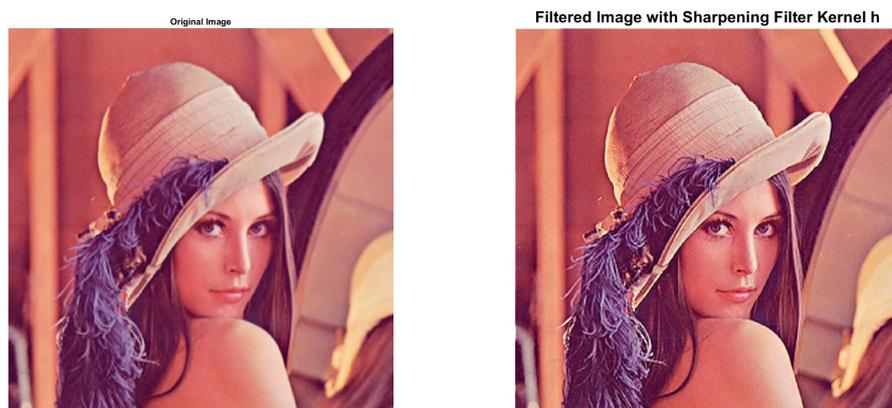


FIGURE 3.19 – Exemple d'application d'un filtre convolutif sur des pixels. Référence : Mathworks.

Le code Matlab correspondant à la Figure 3.19 est disponible ci-dessous :

```
%% Author : Pierre-Jean Lapray
%% This script shows the filtering processing of an image using a ...
    convolution matrix (sharpening filter kernel here)
clear all;
close all;
clc

%% Convolution filtering
I = imread('img.png');
h = [0 -1 0;
     -1 5 -1;
     0 -1 0];
I2 = imfilter(I,h);
subplot(1,2,1); imshow(I), title('Original Image');
subplot(1,2,2); imshow(I2), title('Filtered Image with Sharpening Filter ...
    Kernel h');
set(gcf,'Color',[1,1,1]);set(gca,'fontsize',18);
set(gcf,'PaperUnits','centimeters','PaperPosition',[0 0 20 40]);grid on;
```

3.8.2 Le réseau neuronal convolutif (Convolution Neural Network-CNN)

- Les CNN sont un type de réseau d'apprentissage profond couramment utilisé pour l'analyse d'images (ou de données audio, de séries temporelles, reconnaissance de la parole, etc.). Les CNN éliminent le besoin d'extraction manuelle d'attributs (ou "features") par "Computer Vision", c'est pourquoi ils fonctionnent très bien pour des problèmes complexes tels que la classification d'images.
- La convolution joue un rôle clé dans le réseau neuronal convolutif (CNN). Les CNN ont plusieurs couches, dont la convolution. La couche de convolution agit comme plusieurs filtres où chaque filtre extrait des attributs spécifiques de l'image (ex : la forme des oreilles pour distinguer un chat d'un chien). Le principe est de faire "glisser" une fenêtre de feature sur l'image, et de calculer le produit de convolution entre la feature et chaque portion de l'image balayée. Pour chaque paire (image, filtre) une carte d'activation est créée pour nous indiquer où se situerait la feature dans l'image : plus la valeur est élevée, plus l'endroit ressemble à la feature recherchée.
- Les poids des filtres sont définis à l'avance dans le réseau lors de l'apprentissage du réseau. On utilise un processus d'optimisation récursif (appelé rétropropagation) : on initialise les poids du réseau avec des valeurs aléatoires, puis on met à jour ces poids en regardant les erreurs entre les sorties calculées et les sorties désirées. L'algorithme converge donc de manière itérative vers une configuration optimale des poids.

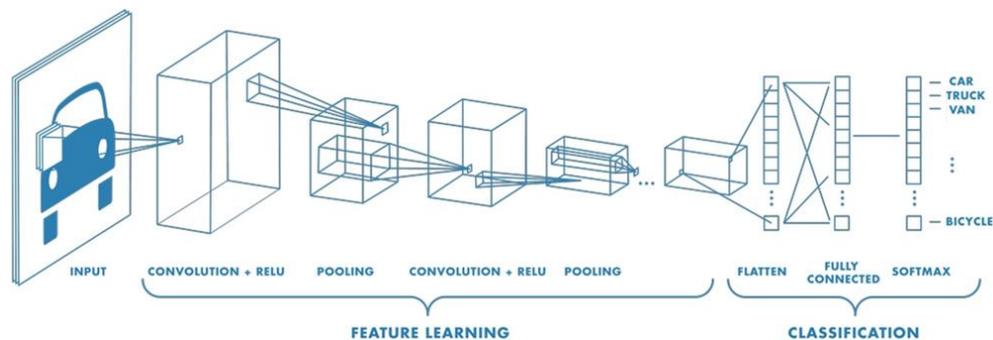


FIGURE 3.20 – Principe des CNNs (Convolution Neural Networks). Référence : Mathworks.

4 La transformée de Fourier

4.1 Introduction

La transformée de Fourier porte le nom de Joseph Fourier, qui a travaillé pour Napoléon. Fourier était très intéressé par la façon dont la chaleur se propage à travers des matériaux de différentes formes, ce qui l'a amené à développer la transformée de Fourier.



FIGURE 4.1 – Jean-Baptiste-Joseph Fourier (1768-1830)

"Toute fonction périodique peut être écrite comme la somme pondérée d'un nombre infini de sinusoïdes de fréquences différentes."

La composante de base de la transformée de Fourier est la sinusoïde. Voici l'expression de la sinusoïde, avec A son amplitude, ν sa fréquence et φ sa phase (ou déphasage). La période T de la sinusoïde est l'inverse de sa fréquence.

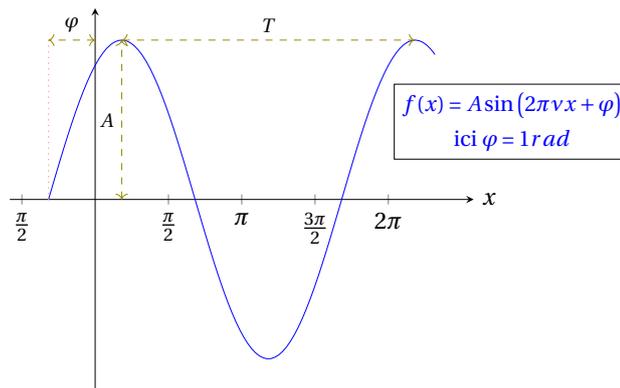


FIGURE 4.2 – La fonction sinus. A est l’amplitude, T la période, φ la phase et ν la fréquence ($\frac{1}{T}$). La variable x peut tout aussi bien être la variable indépendante t .

Par exemple, un signal carré peut être décomposé en somme de sinus d’amplitudes, de phases et de fréquences différentes :

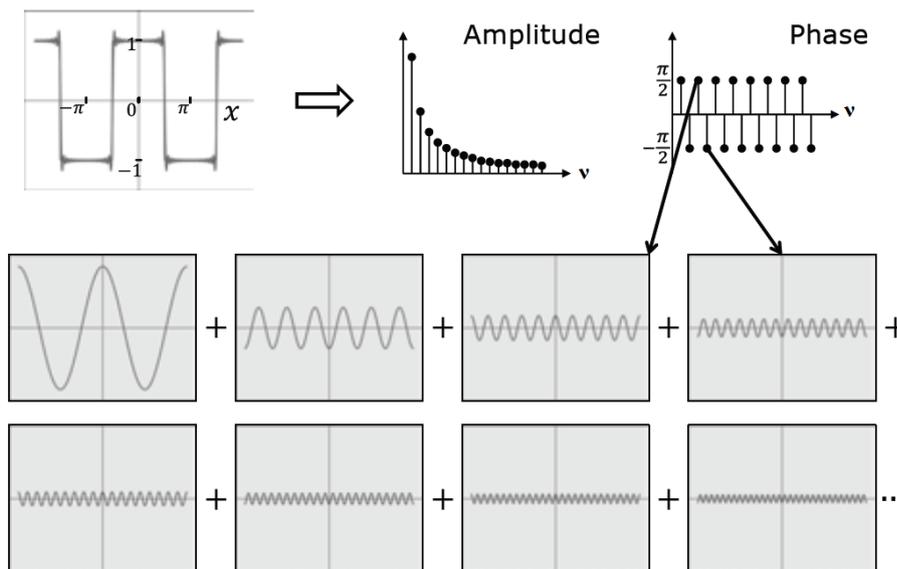


FIGURE 4.3 – Décomposition d’un signal carré et sa représentation fréquentielle.

Une chose importante à noter ici : regardez les amplitudes et les phases des composantes sinusoïdales. Notez que les phases basculent entre $+\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ dans le cas de l’onde carrée. Bien que nous ayons utilisé l’onde carrée comme exemple ici, la transformée de Fourier peut être appliquée à n’importe quel signal périodique. Dans chaque cas, on donne une représentation alternative du signal, en termes d’amplitudes et de phases des différentes composantes sinusoïdales. Cette représentation est appelée domaine fréquentiel (ou spectre d’amplitude/phase).

FIGURE 4.4 – Ci-dessus, une onde triangulaire et une onde carrée et leurs premières composantes sinusoïdales, telles que déterminées par leur transformée de Fourier. Ces sinusoïdes sont représentées par ordre croissant de fréquence. En ajoutant simplement ces sinusoïdes, nous obtenons une assez bonne approximation de l'onde. Il s'avère que la transformée de Fourier de l'onde possède un nombre infini de sinusoïdes d'amplitude non nulle. Si nous pouvions ajouter toutes ces sinusoïdes, nous obtiendrions exactement l'onde (**Attention : la figure ci-dessus est un gif, vous devez ouvrir le cours PDF avec Adobe Reader pour voir l'animation**).

4.2 Séries de Fourier

Lorsque les fonctions sont périodiques, elles peuvent être décomposées en série de Fourier. Les transformées de Fourier sont des fonctions continues alors que les séries de Fourier sont des fonctions discrètes. Il faut noter, que dans certains livres, les coefficients a_0 , a_n , b_n (définis ci-dessous) peuvent être notés différemment.

4.2.1 Définition

On montre qu'une fonction périodique $f(t)$ de période T peut s'écrire sous la forme :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) \right)$$

avec

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt$$

, où n représente le rang de l'harmonique. $\frac{a_0}{2}$ représente la valeur moyenne du signal $f(t)$ ($\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$). **Le terme correspondant à l'harmonique de rang $n = 1$ est appelé le fondamental.**

On retrouve de manière mathématique l'idée de base de l'analyse de Fourier : décomposer un signal périodique de fréquence $\frac{1}{T} = \nu_0$ en une somme de sinus/cosinus de fréquences multiples de $\frac{1}{T}$.

4.2.2 Conditions et théorème de Dirichlet

Les conditions de Dirichlet sont les conditions pour qu'une fonction puisse être décomposée en série de Fourier [9].

Les conditions de Dirichlet :

Une fonction f est développable en série de Fourier si :

1. f est périodique,
2. f est dérivable et continue, sauf en un nombre fini de points par période,
3. f et f' admettent des limites à gauche et à droite finies en tout point.

Autrement dit, il faut que la fonction soit une **fonction régulière par morceaux**. Une fonction $f(t)$ est dite régulière par morceaux dans un intervalle donné si :

- L'intervalle peut être subdivisé en un nombre fini d'intervalles où $f(t)$ est continue dans chacun d'eux,
- Les limites de $f(t)$ sont finies vers les bornes de chaque intervalle.

Un exemple est donné sur la Figure 4.5.

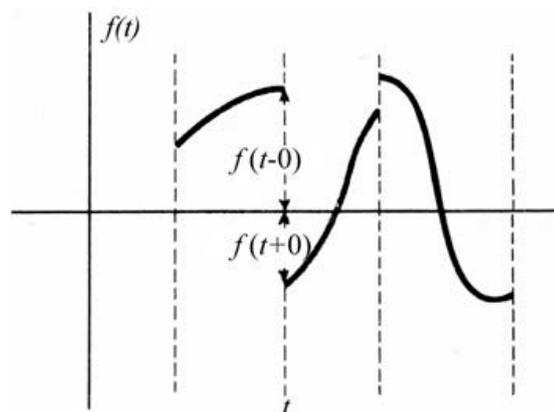


FIGURE 4.5 – Exemple de fonction régulière par morceaux. Une fonction régulière par morceaux est une fonction qui a au plus un nombre fini de discontinuités finies.

Si les conditions de Dirichlet sont respectées, on peut appliquer le théorème de Dirichlet.

Le théorème de Dirichlet :

Si les conditions de Dirichlet sont respectées, ceci assure la convergence^a de la série de Fourier de f vers f . La série de Fourier converge vers :

1. $f(t)$ si t est un point de continuité,
2. $\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$ si t est un point de discontinuité.

a. Une des questions centrales en mathématique est celle du comportement de la série de Fourier : est-ce qu'en cas de convergence, il y a égalité entre la somme des sinus/cosinus et la fonction initialement considérée? En d'autres termes : est-ce que la série de Fourier converge vers f ? Ceci dans le but de pouvoir remplacer l'étude de la fonction elle-même par celle de sa série de Fourier (très pratique).

Nous pouvons donc écrire

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) \right)$$

en tout point de continuité. Cependant, si t est un point de discontinuité, le membre de gauche est remplacé par $\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$, de telle manière que la série converge vers la valeur moyenne de $f(t+0)$ et de $f(t-0)$.

Important : Les conditions précédentes sont, en fait, généralement satisfaites dans les cas qui se présentent en physique et en ingénierie.

4.2.3 Fonctions paires et impaires

- Une fonction $f(x)$ est dite **paire** si $f(x) = f(-x)$.
 - Ex : x^4 , $\cos x$, $2x^6 - 4x^2 - 5$.
 - Seuls les **termes en cosinus** (b_n nuls) et parfois une constante peuvent être présents dans un développement en série de Fourier d'une fonction paire.
- Une fonction $f(x)$ est dite **impaire** si $f(-x) = -f(x)$.
 - Ex : x^3 , $\sin x$, $x^5 - 3x^3 + 2x$.
 - Seuls les **termes en sinus** (a_n nuls) peuvent être présents dans un développement en série de Fourier d'une fonction impaire.

La Figure 4.6 montre des exemples de fonctions périodiques.

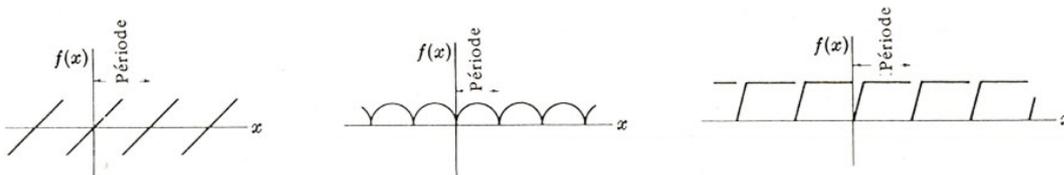


FIGURE 4.6 – Exemple de fonction périodiques. De gauche à droite : fonction impaire, fonction paire et fonction ni paire ni impaire.

4.2.4 Exemple de série de Fourier

Trouver les coefficients de la série de Fourier et écrire la série de Fourier du signal de la Figure 4.7.

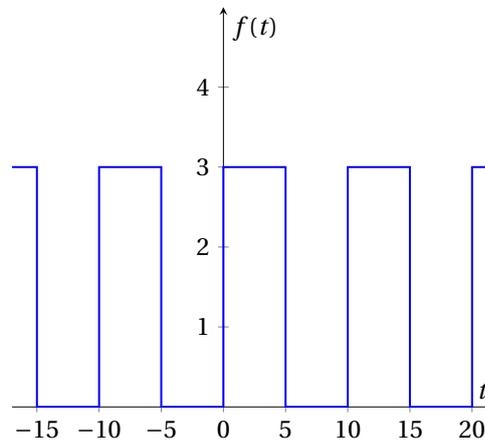


FIGURE 4.7 – Le signal carré étudié.

Le signal a une période $T = 10$ et une amplitude de 3. Donc :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{10} \int_{-5}^{+5} f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{10} nt\right) dt \\ &= \frac{2}{10} \int_{-5}^0 0 \cos\left(\frac{\pi}{5} nt\right) dt + \frac{2}{10} \int_0^{+5} 3 \cos\left(\frac{\pi}{5} nt\right) dt \\ &= \frac{3}{5} \left[\frac{5}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi}{5} nt\right) \right]_0^5 = 0 \text{ pour } n \neq 0 \end{aligned}$$

et

$$a_0 = \frac{2 \times 3}{10} \int_0^5 1 dt = \frac{3}{5} [t]_0^5 = 3$$

Donc la valeur moyenne vaut $\frac{a_0}{2} = \frac{3}{2}$.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{10} \int_{-5}^0 0 \sin\left(\frac{\pi}{5} nt\right) dt + \frac{2}{10} \int_0^{+5} 3 \sin\left(\frac{\pi}{5} nt\right) dt \\ &= \frac{3}{5} \left[\frac{-5}{\pi n} \cos\left(\frac{\pi}{5} nt\right) \right]_0^5 = 3 \left(\frac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi} \right) \\ &= 3 \left(\frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \right) \end{aligned}$$

Cela donne au final :

$$f(t) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(3 \left(\frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{5} t\right) \right)$$

On remarque que les harmoniques sont de rang n impair ($n = 1, n = 3, n = 5$, etc.).

À partir de ces équations, on peut calculer différentes harmoniques et les sommer.

La Figure 4.8 est la visualisation des 3 premières harmoniques (nommées x_1 , x_2 et x_3), et la reconstruction du signal carré à partir de 3 et 15 harmoniques. x_0 correspond à la valeur moyenne précédemment calculée ($\frac{a_0}{2}$). On remarque que la fidélité au signal d'origine augmente avec le nombre d'harmoniques.

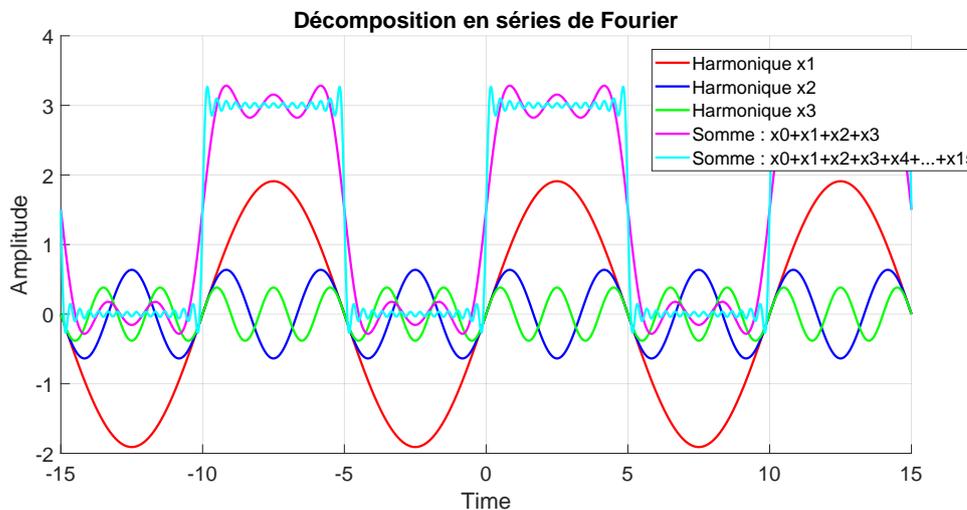


FIGURE 4.8 – Visualisation des 3 premières harmoniques calculées à partir des coefficients de série de Fourier, et la reconstruction du signal carré à partir de 3 et 15 harmoniques (violet et bleu ciel respectivement). Le phénomène de Gibbs est un effet de bord observé au voisinage d'une discontinuité de la fonction.

Le code Matlab correspondant à la Figure 4.8 est disponible ci-dessous :

```
%% Author : Pierre-Jean Lapray
%% This script shows the Fourier series of a square signal (up the 15th ...
    coefficient)
close all;
clear all;
clc;

%% Define x space (can be time or whatever)
xt = -15:0.01:15;

%% Define mean value of the generated signal
x0 = 1.5;
```

```

%% Calculate the Fourier series coefficients up to the 15th harmonic
% (Seuls les termes en sinus et parfois une constante peuvent être présents
% dans un développement en série de Fourier d'une fonction impaire)
for n = 1:2:29
    x(:,n) = 3.*((1-(-1).^n)./(n*pi)).*sin((n*pi/5)*xt);
end

%% Visualization
plot(xt,x(:,1),'r','LineWidth',2);hold all;
plot(xt,x(:,3),'b','LineWidth',2);
plot(xt,x(:,5),'g','LineWidth',2);
plot(xt,x0+sum(x(:,1:2:5),2),'m','LineWidth',2);
plot(xt,x0+sum(x(:,1:2:30),2),'c','LineWidth',2);
title('Décomposition en séries de ...
      Fourier');xlabel('Time');ylabel('Amplitude');
set(gcf,'Color',[1,1,1]);set(gca,'fontsize',18);
set(gcf,'PaperUnits','centimeters','PaperPosition',[0 0 20 40]);grid on;
legend('Harmonique x1','Harmonique x2','Harmonique x3','Somme : ...
      x0+x1+x2+x3','Somme : x0+x1+x2+x3+x4+...+x15','FontSize',16);

```

Pour information, les harmoniques individuelles sont égales à :

$$x_1(t) = \frac{6}{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{5} t \right) \quad (\text{Harmonique d'ordre 1 : } \mathbf{\text{fondamental}})$$

$$x_2(t) = \frac{6}{\pi} \left(\frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{5} t \right) \quad (\text{2ème harmonique})$$

$$x_3(t) = \frac{6}{\pi} \left(\frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{5} t \right) \quad (\text{3ème harmonique})$$

..., etc.

La décomposition en série de Fourier avec 3 harmoniques est égale à :

$$f(t) = \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{5} t + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{5} t + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{5} t \right)$$

La décomposition en série de Fourier avec 15 harmoniques est égale à :

$$f(t) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{29} \left(3 \left(\frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \right) \cdot \sin \left(\frac{n\pi}{5} t \right) \right)$$

— Un utilitaire Matlab (GUI FourierSeries) très simple à utiliser et qui permet de visualiser des séries de Fourier est disponible ici : <https://dspfirst.gatech.edu/matlab/>

4.2.5 Série de Fourier sous forme complexe

On peut reformuler le développement de la série de Fourier en notation complexe¹. Le but est de transformer les sinus/cosinus pour faire apparaître des complexes avec les relations d'Euler. Les relations d'Euler :

$$\cos \alpha = \frac{e^{+j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} \qquad \sin \alpha = \frac{e^{+j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$$

On sait que la forme réelle de la série de Fourier s'écrit :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos 2\pi\nu_0 n t + b_n \sin 2\pi\nu_0 n t \right) \text{ avec } \nu_0 = \frac{1}{T}$$

À partir des relations d'Euler précédentes, on a :

$$\cos 2\pi\nu_0 n t = \frac{e^{j2\pi\nu_0 n t} + e^{-j2\pi\nu_0 n t}}{2} \qquad \sin 2\pi\nu_0 n t = \frac{e^{j2\pi\nu_0 n t} - e^{-j2\pi\nu_0 n t}}{2j} = -j \left(\frac{e^{j2\pi\nu_0 n t} - e^{-j2\pi\nu_0 n t}}{2} \right)$$

En remplaçant dans $f(t)$:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \left(\frac{e^{j2\pi\nu_0 n t} + e^{-j2\pi\nu_0 n t}}{2} \right) - j b_n \left(\frac{e^{j2\pi\nu_0 n t} - e^{-j2\pi\nu_0 n t}}{2} \right) \right)$$

On factorise pour faire apparaître des complexes conjugués :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - j b_n}{2} e^{j2\pi\nu_0 n t} + \frac{a_n + j b_n}{2} e^{-j2\pi\nu_0 n t} \right)$$

On définit les coefficients de Fourier complexe comme ceci :

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \qquad c_n = \frac{a_n - j b_n}{2} \qquad c_{-n} = \frac{a_n + j b_n}{2}$$

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{j2\pi\nu_0 n t} + c_{-n} e^{-j2\pi\nu_0 n t} \right)$$

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(c_n e^{j2\pi\nu_0 n t} \right)}$$

où $f(t)$ est la forme complexe de la série de Fourier, et où c_n est un ensemble discret de

¹ Il existe également une forme qu'à partir de cosinus, en transformant les sinus en cosinus, mais nous ne la verrons pas dans ce cours.

coefficients de Fourier complexes tels que :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-j2\pi\nu_0 n t} dt$$

Avec la forme complexe de la série de Fourier, on peut obtenir des spectres bilatéraux d'amplitude et de phase du signal à partir de l'amplitude et de la phase capturées par le coefficient de Fourier associé à chaque fréquence. On représente donc le signal dans l'espace de Fourier (ou en fonction des fréquences).

- On appelle l'ensemble des modules des coefficients de Fourier c_n (c.-à-d. $|c_n|$) le **spectre en amplitude de f** .
- L'ensemble des arguments des c_n (c.-à-d. $arg(c_n)$) est le **spectre de phase**.
- Pour un signal réel, on a $c_n = c_n^*$, soit $|c_n| = |c_{-n}|$. Autrement dit, le spectre en amplitude est symétrique par rapport à l'axe $n = 0$.

Le spectre d'une fonction périodique de période T est composé de raies dont l'écart minimum est, sur l'axe des fréquences : $\nu_0 = \frac{1}{T}$. Le spectre d'une fonction périodique est donc essentiellement discontinu, il n'existe que pour les valeurs de la fréquence multiples de $\nu_0 = \frac{1}{T}$ (ou de $\omega_0 = 2\pi\nu_0$).

Un exemple de spectre pour un signal carré est visible sur la Figure 4.9.

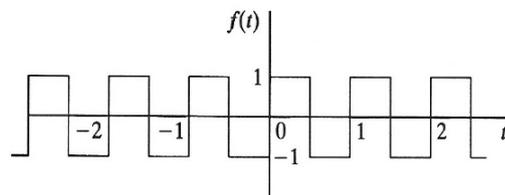


FIGURE 4-29. A square wave.

Son spectre

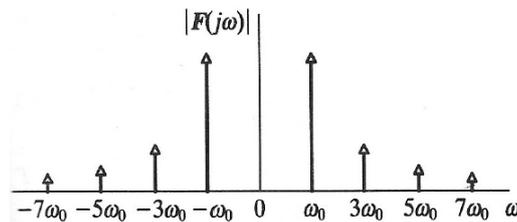
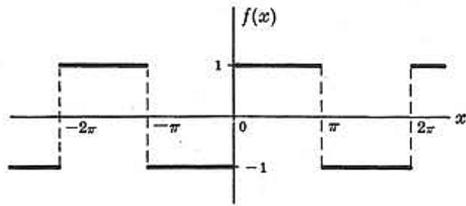
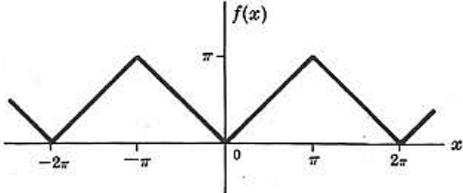
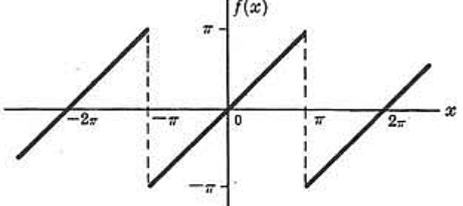
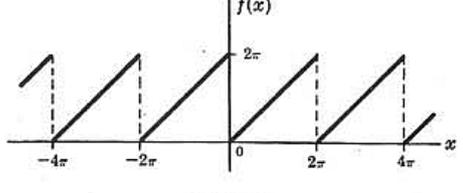
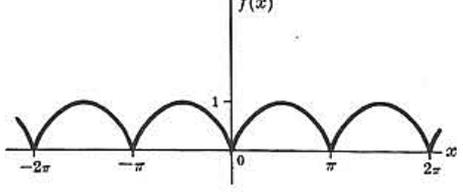
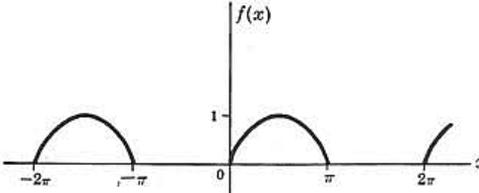


FIGURE 4-31. The frequency spectrum of the square wave.

FIGURE 4.9 – Le signal carré est exclusivement constitué d'harmoniques de fréquences multiples impaires de la fréquence fondamentale ν_0 (ou pulsation ω_0) et dont les amplitudes décroissent rapidement. Si la période du signal carré de base augmente, l'écart entre les raies diminue.

4.2.6 Exemples de séries de Fourier de signaux périodiques

$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ -1 & -\pi < x < 0 \end{cases}$	 <p style="text-align: center;">Fig. B-1</p>
$\frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$	
$f(x) = x = \begin{cases} x & 0 < x < \pi \\ -x & -\pi < x < 0 \end{cases}$	 <p style="text-align: center;">Fig. B-2</p>
$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right)$	
$f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi$	 <p style="text-align: center;">Fig. B-3</p>
$2 \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right)$	
$f(x) = x, \quad 0 < x < 2\pi$	 <p style="text-align: center;">Fig. B-4</p>
$\pi - 2 \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right)$	
$f(x) = \sin x , \quad -\pi < x < \pi$	 <p style="text-align: center;">Fig. B-5</p>
$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right)$	
$f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 < x < \pi \\ 0 & \pi < x < 2\pi \end{cases}$	 <p style="text-align: center;">Fig. B-6</p>
$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right)$	

Pour résumer, la **série de Fourier** est utilisée pour représenter une fonction périodique par une somme discrète d'exponentielles complexes (ou, de manière équivalente, en sinus et cosinus via l'identité d'Euler $e^{iy} = \cos y + i \sin y$). Une fonction générale non périodique n'admet pas d'expression sous forme de superposition discrète d'exponentielles, mais seulement une superposition continue. La **transformée de Fourier** est utilisée dans ce cas, avec une superposition continue (ou intégrale) d'exponentielles complexes. La transformée de Fourier peut être considérée comme la limite de la série de Fourier d'une fonction dont la période s'approche de l'infini, de sorte que les limites d'intégration changent de T à $[-\infty, +\infty]$.

4.3 Transformée de Fourier

La transformée de Fourier est une généralisation de la série de Fourier complexe pour des signaux non périodiques. ^{II}

4.3.1 Démonstration et définition

On rappelle que tout signal périodique physique peut s'écrire en notation complexe :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n e^{j2\pi\nu_0 n t}) \qquad c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-j2\pi\nu_0 n t} dt$$

alors :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi\nu_0 n t} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t') e^{-j2\pi\nu_0 n t'} dt'$$

(on prend une nouvelle variable t' pour ne pas mélanger avec t)

Si le signal n'est pas périodique, on peut toujours considérer que le signal $f(t)$ est un unique motif d'un signal périodique dont la période T tend vers l'infini. Cela a pour conséquence un spectre continu (\neq discret). On en déduit donc ces changements :

- La somme se transforme en intégrale
- $T \rightarrow \infty$
- $n\nu_0 \rightarrow \nu$ (ce ne sont plus des fréquences discrètes, mais continues)
- $\frac{1}{T} \rightarrow d\nu$ (très petit intervalle de fréquence)

On obtient alors :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi\nu t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-j2\pi\nu t'} dt' \right] d\nu$$

II. Pour l'instant, nous nous en tiendrons aux signaux à une seule dimension, en gardant à l'esprit que toutes les expressions que nous rencontrons sont facilement extensibles à des dimensions supérieures (pour des images par exemple).

Le terme entre crochet est appelé la transformée de Fourier de $f(t)$:

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi\nu t} dt \quad : \text{Transformée de Fourier } F(\nu) = TF[f(x)]$$

La transformée de Fourier ressemble à son inverse (notée aussi $TF^{-1}[F(\nu)]$), sauf que vous avez un négatif dans l'exposant :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{+j2\pi\nu t} d\nu \quad : \text{Transformée de Fourier inverse } f(t) = TF^{-1}[F(\nu)]$$

Si on intègre par rapport à $\omega = 2\pi\nu$, on peut également écrire :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{+j\omega t} d\omega$$

Remarque : Pour qu'une fonction ait une TF, il faut respecter les conditions d'existence de la transformée de Fourier.

1. La fonction $f(t)$ est bornée (pas de valeurs infinies),
2. L'intégrale de $f(t)$ sur $[-\infty, +\infty]$ a une valeur finie,
3. Les discontinuités, maximas et minimas sont en nombre fini.

Généralement, on observe un signal avec une énergie finie et sur un temps fini, donc les conditions énoncées ci-dessus sont respectées pour la plupart des applications d'ingénierie.

4.3.2 Transformée de Fourier 2D

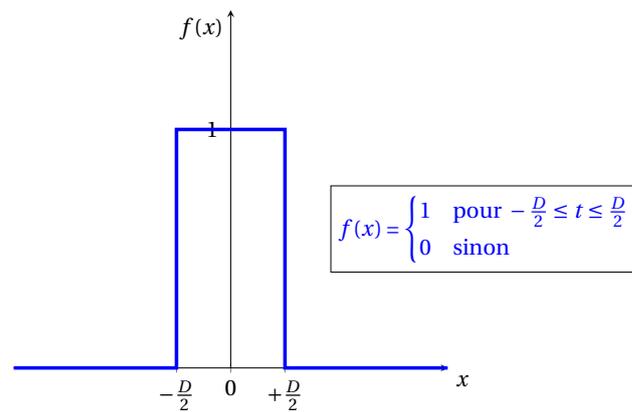
La transformée de Fourier peut aussi s'appliquer à des signaux bidimensionnels, c'est-à-dire à des images 2D. Dans ce cas, la transformée de Fourier s'exprime ainsi :

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(xu+yv)} dx dy$$

avec $f(x, y)$ l'image d'entrée.

4.3.3 Exemple de transformée de Fourier

On considère la fonction porte (ou fonction fenêtre) de largeur D sur la Figure 4.10. Dans cet exemple (et pour changer un peu...), on considère x comme étant une variable indépendante

FIGURE 4.10 – La fonction porte $\Pi_D(x)$.

représentant une longueur, et on note u l'inverse d'une longueur (ou fréquence spatiale).

$$\begin{aligned}
 F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_D(x) e^{-j2\pi ux} dx = \int_{-\frac{D}{2}}^{+\frac{D}{2}} 1 \cdot e^{-j2\pi ux} dx = -\frac{1}{j2\pi u} \left[e^{-j2\pi ux} \right]_{-\frac{D}{2}}^{+\frac{D}{2}} \\
 &= -\frac{1}{j2\pi u} \left[e^{-j2\pi u \frac{D}{2}} - e^{+j2\pi u \frac{D}{2}} \right] = \frac{1}{\pi u} \left[\frac{e^{-j2\pi u \frac{D}{2}} - e^{+j2\pi u \frac{D}{2}}}{j2} \right] = \frac{1}{\pi u} \sin \pi u D = D \frac{\sin \pi u D}{\pi u D} \\
 &= D \operatorname{sinc}(\pi u D)
 \end{aligned}$$

Note : $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \frac{\sin x}{x}$

La Figure 4.11 montre les spectres d'amplitudes et d'intensité du signal. L'ordonnée d'un spectre peut aussi être en dB, cela permet de mieux distinguer des différences d'amplitude pour des signaux réels (où il y a présence de bruit).

On remarque que la largeur du lobe central est inversement proportionnelle à la largeur D de la fenêtre.

4.4 Propriétés de la transformée de Fourier

On gardera ici la notation des variables indépendantes $x \xrightarrow{TF} u$. La transformation de Fourier inverse a des propriétés analogues à la transformée de Fourier.

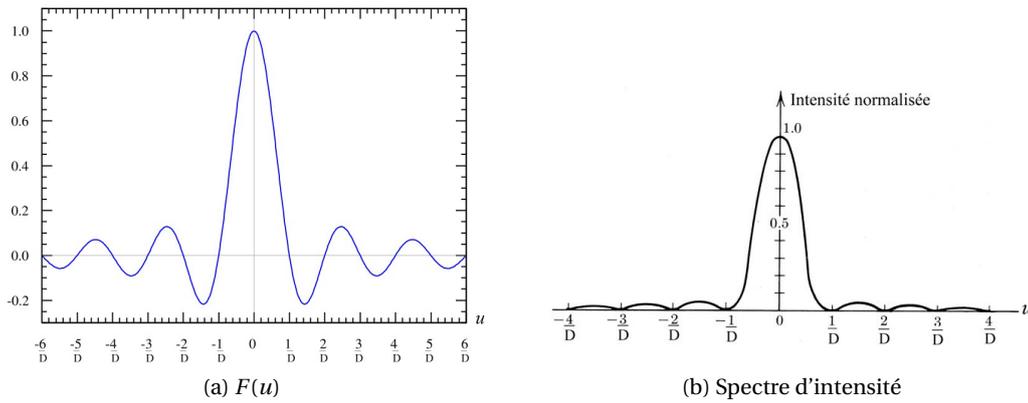


FIGURE 4.11 – (a) Amplitude normalisée de la transformée de Fourier $F(u)$. (b) Spectre d'intensité du signal. C'est le carré de la norme du spectre (c.-à-d. $|F(u)|^2$) en fonction de la fréquence spatiale u .

4.4.1 Linéarité

Cette propriété découle directement de la linéarité de la fonction intégrale :

$$af(x) \xrightarrow{TF} aF(u)$$

$$f(x) + g(x) \xrightarrow{TF} F(u) + G(u)$$

4.4.2 Translation dans le temps (ou théorème du retard)

$$f(x - a) \xrightarrow{TF} e^{-j2\pi au} F(u)$$

4.4.3 Homothétie

$$f(ax) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{u}{a}\right)$$

4.4.4 Transposition et conjugaisons

$$f(-x) \xrightarrow{TF} F(-u)$$

$$f^*(x) \xrightarrow{TF} F^*(-u)$$

$$f^*(-x) \xrightarrow{TF} F^*(u)$$

Donc on en déduit :

$$f(x) \text{ réelle et paire} \xrightarrow{TF} F(u) \text{ réelle et paire}$$

$$f(x) \text{ réelle et impaire} \xrightarrow{TF} F(u) \text{ imaginaire et impaire}$$

$$f(x) \text{ imaginaire et paire} \xrightarrow{TF} F(u) \text{ imaginaire et paire}$$

4.4.5 Fonction multipliée par un déphasage

$$f(x)e^{j2\pi ax} \xrightarrow{TF} F(u-a)$$

4.4.6 Dérivée d'une fonction

$$\frac{df(x)}{dx} \xrightarrow{TF} j2\pi uF(u)$$

4.4.7 Produit de convolution

$$h(x) = f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cdot g(x-y) dy$$

$$g(x-y) = \int_{-\infty}^{\infty} G(u) \cdot e^{j2\pi u(x-y)} du$$

Si on remplace dans l'expression de la convolution :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} G(u) \cdot e^{j2\pi u(x-y)} du \right] dy$$

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(u) \cdot e^{j2\pi ux} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cdot e^{-j2\pi uy} dy du$$

Comme $\int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cdot e^{-j2\pi uy} dy = F(u)$, $h(x)$ peut alors s'écrire :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \cdot G(u) e^{j2\pi ux} du$$

$$= TF^{-1} [F(u).G(u)]$$

Donc :

$$TF [f(x) * g(x)] = F(u).G(u)$$

$$TF^{-1} [F(u).G(u)] = f(x) * g(x)$$

Cette propriété est couramment utilisée en traitement du signal et en traitement d'images pour le calcul numérique de la convolution. Grâce aux algorithmes de calcul rapide de la transformée de Fourier, le temps de calcul sera plus faible si l'on passe par les transformées de Fourier pour le calcul de la convolution plutôt que de calculer l'intégrale de convolution. Elle est largement utilisée en traitement d'image (filtrage, suppression de bruit, etc.).

De même, on peut montrer de manière similaire que la transformée de Fourier du produit de 2 fonctions est :

$$TF [f(x).g(x)] = F(u) * G(u)$$

$$TF^{-1} [F(u) * G(u)] = f(x).g(x)$$

La Figure 4.12 (tirée de [6]) présente un exemple d'utilisation de la convolution pour l'imagerie 2D.

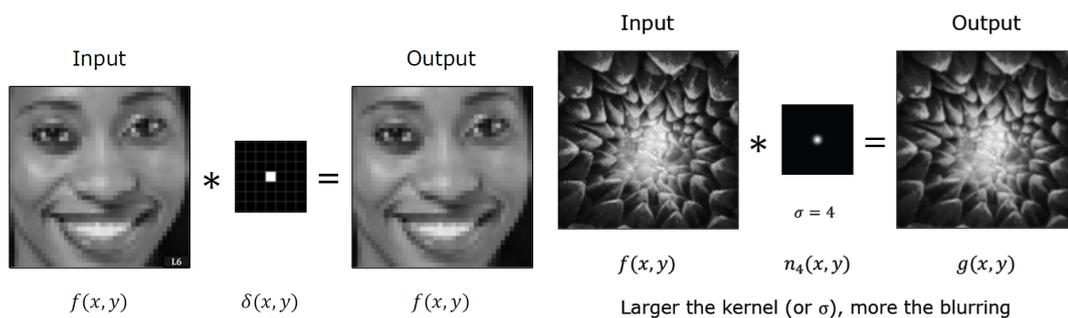


FIGURE 4.12 – Exemple de convolution d'images avec des fonctions filtres : une impulsion et un filtre Gaussien. Le filtrage Gaussien floute l'image d'entrée. Les signaux sont discrets ici (pixels).

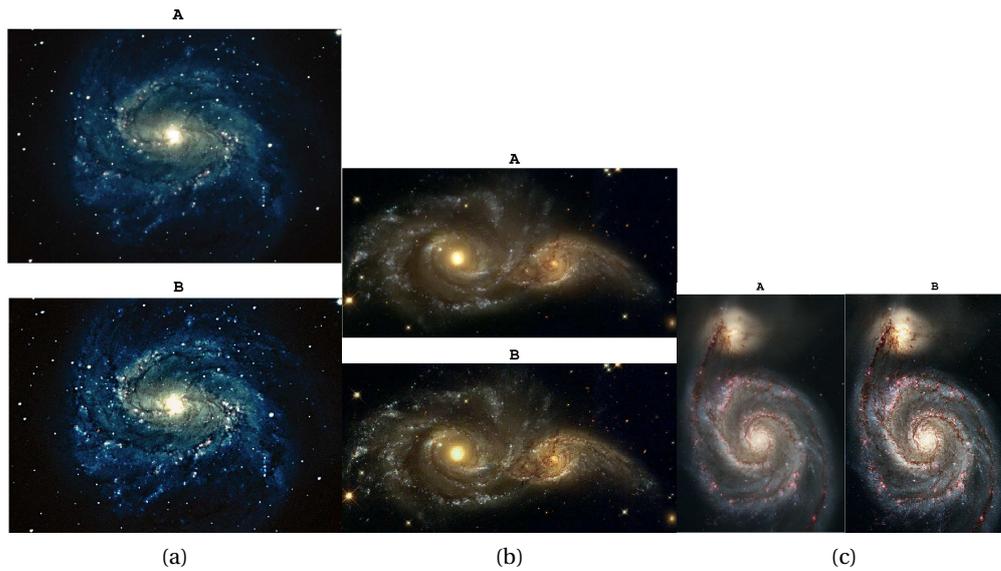


FIGURE 4.13 – L'opération de déconcolution 2D est l'opération qui consiste à reconstruire l'image de base $f(x, y)$. Un exemple ici [2] de déconvolution appliquée dans l'espace de Fourier sur des images en sortie du télescope Hubble, affectées par un problème de construction de l'optique (défauts de fabrication du miroir primaire, ce qui rend les images floues).

4.4.8 Corrélation

Le produit de corrélation se note \otimes , et n'est pas commutatif^{III}.

$$c_{fg}(x) = f(x) \otimes g(x) = f(x) * g^*(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cdot g(y-x) dy$$

Dans le cas d'une fonction $g(x)$ réelle pure, le calcul s'apparente à une convolution, il suffit de ne pas retourner la fonction $g(x)$. Cela semble être une différence triviale, mais, en fait, cela a des implications mathématiques qui se traduisent par des propriétés différentes entre convolution et corrélation.

La corrélation est donc un concept étroitement lié à la convolution. Elle est beaucoup utilisée pour trouver un motif donné dans une image (reconnaissance de forme ou "template matching").

Les Figures ci-dessous (tirées de [5]) permettent de comprendre comment la corrélation est utilisée pour repérer un motif particulier dans une image.

III. Opération dont le résultat est invariable quel que soit l'ordre des facteurs.

How do we locate the template in the image?

Minimize:

$$E[i, j] = \sum_m \sum_n (f[m, n] - t[m - i, n - j])^2$$

$$E[i, j] = \sum_m \sum_n (f^2[m, n] + t^2[m - i, n - j] - \underline{2f[m, n]t[m - i, n - j]})$$

Maximize

FIGURE 4.14 – L’objectif est de trouver le gabarit (le visage du roi à droite) dans l’image de la carte à gauche. Une façon naturelle de résoudre ce problème est de faire glisser le gabarit sur l’image et pour chaque position, trouver la différence entre le gabarit et la région de l’image qu’il recouvre. Nous pouvons définir mathématiquement la différence $E(i, j)$ entre le modèle et la région d’image à l’emplacement (i, j) , comme la somme des différences au carré. Lorsque cette différence est faible, nous avons trouvé le modèle dans l’image. En développant $E(i, j)$, nous obtenons l’expression en bas. Notons que minimiser $E(i, j)$ revient à maximiser le dernier des trois termes de $E(i, j)$.

How do we locate the template in the image?

Maximize:

$$R_{tf}[i, j] = \sum_m \sum_n f[m, n]t[m - i, n - j] = t \otimes f$$

FIGURE 4.15 – Ici, nous montrons le dernier terme mentionné ci-dessus, qui est appelé **corrélacion** (ou **corrélacion croisée** ou **intercorrélacion**).

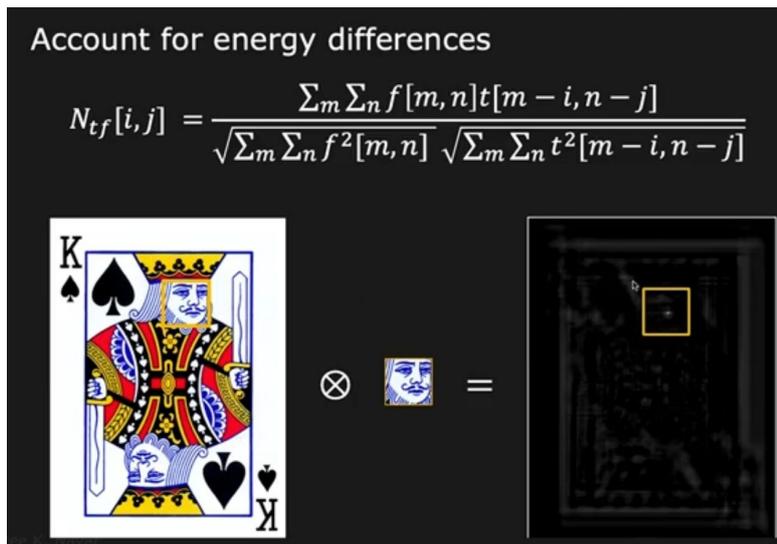


FIGURE 4.16 – Voici le résultat d’une corrélation croisée normalisée appliquée à un problème à deux dimensions. Cette normalisation de la corrélation croisée est souvent nécessaire en imagerie, car elle la rend insensible à la luminosité globale de la région d’image à laquelle elle est appliquée. Nous essayons de trouver le visage du roi (le gabarit) dans l’image de la carte à jouer. L’image de droite montre la valeur de corrélation pour chaque pixel de l’image d’origine (la carte à jouer). Dans l’image de corrélation, plus le pixel est brillant, plus la valeur de corrélation est élevée. Notez que la valeur maximale se situe bien à l’emplacement du visage du roi dans la carte.

4.4.9 Autocorrélation

C’est la corrélation de $f(x)$ par elle-même :

$$c_{ff}(x) = f(x) \otimes f(x) = f(x) * f^*(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cdot f(y-x) dy$$

et

$$c_{ff}(x) \xrightarrow{TF} F(u) \cdot F^*(u) = |F(u)|^2$$

4.4.10 Relation de Parseval-Plancherel

La relation de Parseval-Plancherel montre que l’énergie totale d’un signal ne dépend pas de la représentation choisie. Elle sera la même, qu’il s’agisse de la représentation temporelle ou de la représentation fréquence.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2 du$$

4.5 Transformée de Fourier du Dirac $\delta(t)$

1° - DEFINITION

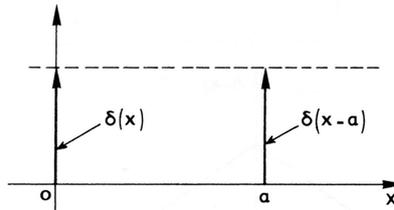
La distribution $\delta(x)$ est nulle partout, sauf à l'origine. Elle satisfait les relations :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-\alpha) f(x) dx = f(\alpha)$$

$\delta(x)$ et $\delta(x-\alpha)$ sont représentées graphiquement par :



2° - CONVOLUTION PAR $\delta(x)$

Formons le produit de convolution d'une fonction (ou distribution) $f(x)$ par $\delta(x)$:

$$\delta(x) * f(x) = f(x) * \delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \cdot \delta(x-y) dy$$

$\delta(x-y)$ est toujours nul, sauf pour $x-y = 0$. On a donc :

$$\delta(x-y) = \delta(y-x)$$

Il en résulte que :

$$f(x) * \delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \delta(y-x) dy = f(x)$$

La distribution de Dirac à l'origine est l'unité du produit de convolution.

Conséquence : Autocorrélation de $\delta(x)$

$\delta(x)$ étant réelle et paire :

$$\delta(x) \otimes \delta(x) = \delta(x) * \delta(x) = \delta(x)$$

3° - T.F. DE $\delta(x)$

$\delta(x)$ étant l'unité du produit de convolution, on peut écrire :

$$f(x) = f(x) * \delta(x)$$

Prenons la T.F. de cette égalité :

$$F(u) = F(u) \cdot \text{T.F.} [\delta(x)]$$

Donc :

$$\delta(x) \xrightarrow{\text{T.F.}} 1$$

4° - TRANSLATION

Cherchons le résultat de la convolution de $f(x)$ par $\delta(x-a)$:

$$f(x) * \delta(x-a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \cdot \delta[(x-a)-y] dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \cdot \delta[y-(x-a)] dy$$

Nous avons vu au 1° que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$$

Donc :

$$f(x) * \delta(x-a) = f(x-a)$$

Pour translater une fonction de a , il suffit de la convoluer par $\delta(x-a)$

Notons en particulier que :

$$\delta(x-a) * \delta(x+a) = \delta(x)$$

$$\delta(x-a) * \delta(x-b) = \delta(x-a-b)$$

5° - TRANSLATION D'UN PRODUIT DE CONVOLUTION

Cherchons le résultat de l'opération :

$$\delta(x-a) * [f(x) * g(x)]$$

Puisque le produit de convolution est associatif, on a :

$$\delta(x-a) * [f(x) * g(x)] = f(x-a) * g(x) = f(x) * g(x-a)$$

Pour translater un produit de convolution, il suffit de translater un seul des facteurs.

6° - T.F. DE $\delta(x-a)$

Nous avons vu que :

$$\delta(x) \xrightleftharpoons[\text{T.F.}^{-1}]{\text{T.F.}} 1$$

$$\delta(x - a) \xrightarrow{\text{T.F.}} e^{-j2\pi ua}$$

De même :

$$\delta(x + a) \xrightarrow{\text{T.F.}} e^{j2\pi ua}$$

7° - T.F.⁻¹ DE $\delta(u - a)$

u est la variable de Fourier associée à x :

$$\delta(u) \xrightleftharpoons[\text{T.F.}]{\text{T.F.}^{-1}} 1$$

$$\delta(u - a) \xrightarrow{\text{T.F.}^{-1}} e^{j2\pi ax}$$

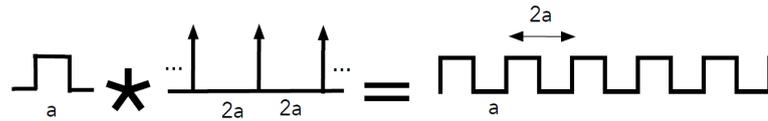
de même :

$$\delta(u + a) \xrightarrow{\text{T.F.}^{-1}} e^{-j2\pi ax}$$

4.6 Transformée de Fourier à Temps Discret (TFTD)

La transformée de Fourier échange discrétisation et périodisation.

1. Lorsqu'un signal est convolué avec un peigne de Dirac d'un pas p , il est dupliqué avec un pas p . Ainsi la convolution d'une fenêtre de largeur a avec un peigne de Dirac III de pas $2a$ donne un signal carré de période $2a$.



2. Lorsqu'un signal continu est multiplié par un peigne de Dirac d'un pas p , il est échantillonné avec un pas p .

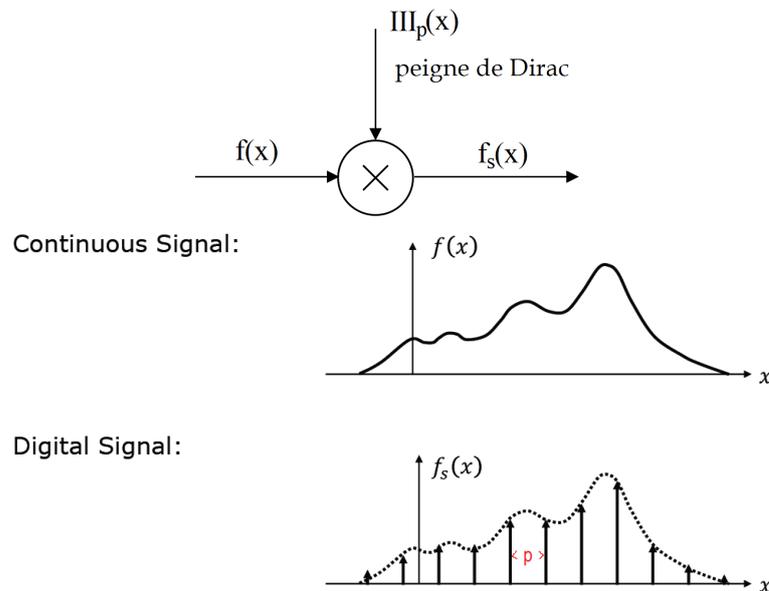


FIGURE 4.17 – Échantillonnage d'un signal $f(x)$.

$$f_s(x) = f(x) \cdot \text{III}_p(x)$$

avec $\text{III}_p(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - kp)$ un peigne de Dirac de pas p .

La transformée de Fourier du signal $f_s(x)$ est donc :

$$TF[f_s(x)] = TF[f(x) \cdot \text{III}_p(x)] = TF[f(x)] * TF[\text{III}_p(x)]$$

Comme $TF[\text{III}_p] = \frac{1}{p} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(u - \frac{k}{p})$, la transformée de Fourier d'un signal $f(x)$ échan-

tillonné avec un pas p sera égale à la transformée de Fourier du signal $f(x)$ dupliqué avec un pas $\frac{1}{p}$.

Pour résumer, le spectre d'un signal discret obtenu par échantillonnage à la période T présente un spectre périodique (spectre du signal continu dupliqué). Donc la TF fonctionne sur un signal à temps discret, mais en fréquence, on repasse en continu : on perd l'avantage du numérique...

4.7 Transformée de Fourier Discrète (TFD)

Un système numérique ne peut pas calculer une TFD car sa réponse fréquentielle est forcément discrète. Lorsque la transformée de Fourier est calculée de manière numérique, le signal d'entrée ainsi que sa transformée de Fourier sont obligatoirement échantillonnés. C'est la transformée de Fourier discrète qui est utilisée (DFT : Discrete Fourier Transform). La TFD est la seule transformée calculable sur ordinateur. Une déclinaison rapide de la TFD existe depuis 1965, la FFT ("Fast Fourier Transform"), et qui est implémentable en temps réel.

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}},$$

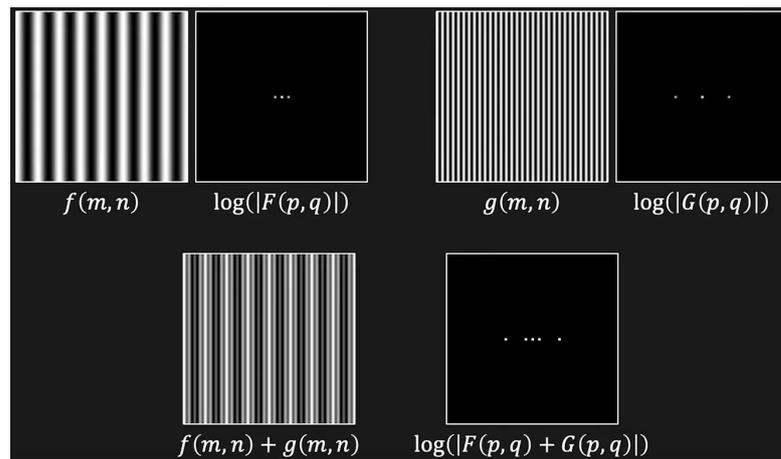
avec $f(n)$ le signal d'entrée échantillonné avec N points et $F(k)$ la TFD. Comme le signal d'entrée est composé de N points, la TFD sera composée de N points également.

La TFD 2D s'écrit :

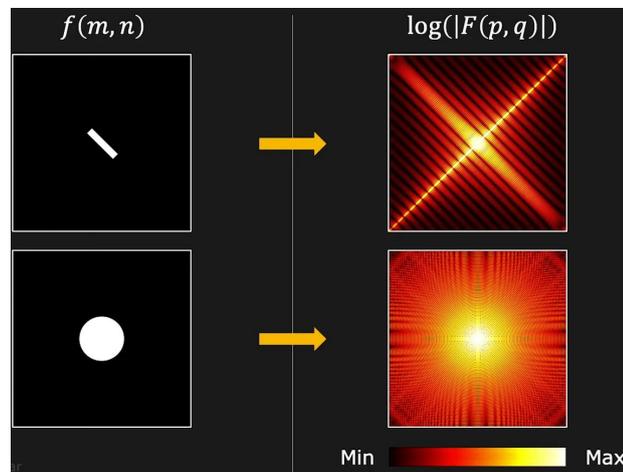
$$F(k, l) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} f(n, m) e^{-j2\pi \left(\frac{nk}{N} + \frac{ml}{M} \right)},$$

Dans le logiciel Matlab, pour la transformée de Fourier rapide 1D : **fft**. Pour la transformée de Fourier rapide 2D : **fft2**.

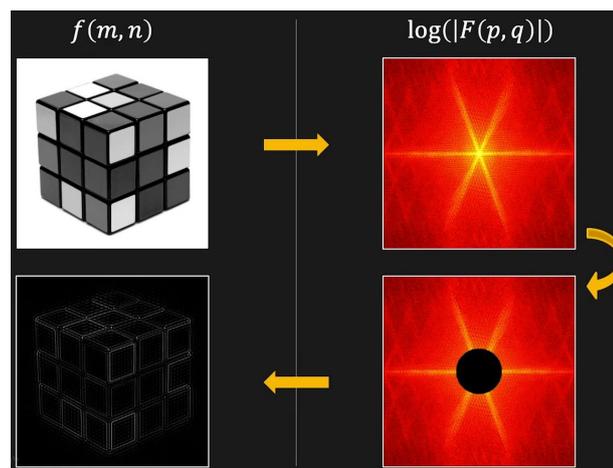
Ci-après quelques exemples de transformées de Fourier 2D [6].



(a) Sinus 2D



(b)



(c)

FIGURE 4.18 – (a) TF 2D d'images simples (cosinus dans la direction x de fréquences différentes). (b) Objets où les contours produisent des fréquences élevées. (c) Exemple de filtrage des basses fréquences dans le domaine de Fourier 2D (on ne garde que les hautes fréquences spatiales, c.-à-d. les contours). À des fins de visualisation, c'est le logarithme de la valeur absolue de l'amplitude qui est montrée (la phase est ignorée). Le log sert à compresser la large gamme de valeurs d'amplitude dans une plage plus petite. Le centre de l'amplitude de la transformée est la fréquence nulle, et la fréquence augmente avec la distance du centre (dans les deux sens). Ici p et q correspondent aux valeurs k et l de la TFD 2D vue précédemment. Référence : [6].

A Table des transformées de Laplace

Transformée de Laplace $F(s) = \mathcal{L} [f(t)]$	Fonction temporelle $f(t)$ où $t \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0$
1	$\delta(t)$ (impulsion unité)
$\frac{1}{s}$	$u(t) = 1$ (échelon unité)
$\frac{a}{s}$	a (où a est une constante)
$\frac{1}{s^2}$	t (rampe unité)
$\frac{a}{s^2}$	$a \cdot t$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$t e^{-at}$
$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{t^2}{2} e^{-at}$
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$
$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$
$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$
$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \sin \omega t$
$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$
$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$t \sin \omega t$
$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$t \cos \omega t$
$\frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$	$1 - \cos \omega t$
$\frac{1}{s(1+Ts)}$	$1 - e^{-t/T}$
$\frac{1}{s(1+Ts)^2}$	$1 - \frac{t+T}{T} e^{-t/T}$
$\frac{1}{s^2(1+Ts)^2}$	$t - 2T + (t+2T)e^{-t/T}$

B Résumé des propriétés de la transformée de Laplace

TABLE 2-1 Theorems of Laplace Transforms

Multiplication by a constant	$\mathcal{L}[kf(t)] = kF(s)$
Sum and difference	$\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$
Differentiation	$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$ $\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f^{(1)}(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
	where
	$f^{(k)}(0) = \left. \frac{d^k f(t)}{dt^k} \right _{t=0}$
Integration	$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$ $\mathcal{L}\left[\int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \dots \int_0^{t_n} f(\tau) d\tau dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1}\right] = \frac{F(s)}{s^n}$
Shift in time	$\mathcal{L}[f(t - T)u_s(t - T)] = e^{-Ts}F(s)$
Initial-value theorem	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
Final-value theorem	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$ if $sF(s)$ does not have poles on or to the right of the imaginary axis in the s -plane
Complex shifting	$\mathcal{L}[e^{\mp \alpha t} f(t)] = F(s \pm \alpha)$
Real convolution	$F_1(s)F_2(s) = \mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t - \tau) d\tau\right]$ $= \mathcal{L}\left[\int_0^t f_2(\tau)f_1(t - \tau) d\tau\right]$ $= \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)]$

Table 2-1 summarizes the theorems of the Laplace transforms presented.

Bibliographie

- [1] Pierre AMBS. *Cours - Outils mathématiques*. Published on Moodle for ENSISA - "Filière Automatique et Systèmes Embarqués", 2021.
- [2] Alfred S CARASSO. «APEX blind deconvolution of color Hubble space telescope imagery and other astronomical data». In : *Optical Engineering* 45.10 (2006), p. 107004.
- [3] Farid GOLNARAGHI et Benjamin C KUO. *Automatic control systems*. McGraw-Hill Education, 2017.
- [4] Jacques MAX. *Méthodes et techniques de traitement du signal et application aux mesures physiques. Tome 2*. BOOK. Masson, 1981.
- [5] S.K. NAYAR. « Image Processing I ». In : *Monograph FPCV-1-4, First Principles of Computer Vision*. Columbia University, New York, mars 2022.
- [6] S.K. NAYAR. « Image Processing II ». In : *Monograph FPCV-1-4, First Principles of Computer Vision*. Columbia University, New York, mars 2022.
- [7] Katsuhiko OGATA et al. *Modern control engineering*. T. 5. Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 2010.
- [8] MR SPIEGEL. *Transformées de Laplace, Série Schaum*. 1980.
- [9] Murray R SPIEGEL. *Analyse de Fourier, Série Schaum*. 1983.